Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Jeudi 5 mai 1988, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long sur 15 cm de large.

Le but du problème est d'étudier les fonctions polynômes P à coefficients réels telles que, pour tout nombre réel x :

(1) $\qquad (x^2 - 1)\, P''(x) + 4xP'(x) = \lambda P(x)$

où λ est un nombre réel donné et où P' et P" désignent les dérivées première et seconde de P.

Dans la partie I, on détermine à partir d'une suite $(P_0, P_1, ..., P_n, ...)$ de solutions particulières toutes les solutions de cette équation et on établit une relation de récurrence satisfaite par les polynômes P_n.

Dans la partie II, on utilise cette relation pour obtenir le comportement de la suite des valeurs $(P_n(x))$ en un point x donné, en commençant par le cas particulier où x = 5/3.

I - ETUDE DE L'EQUATION (1).

1°) Soit P une solution non nulle de (1), de degré $n \geq 0$.

a) Montrer, en identifiant dans (1) les termes de plus haut degré, que λ est nécessairement égal à $n(n+3)$.

b) Soit $Q(x) = (-1)^n P(-x)$. Montrer que Q est solution de (1). En étudiant le degré du polynôme P - Q, prouver que P = Q et en déduire la parité de P en fonction de n.

2°) Inversement, on se propose de prouver qu'étant donné un entier $n \geq 0$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels et un seul dont le terme de plus haut degré est x^n et tel que, pour tout nombre réel x :

(2) $\qquad (x^2 - 1)\, P''_n(x) + 4xP'_n(x) = n(n + 3)\, P_n(x)$

a) Déterminer P_0, P_1, P_2.

b) Dans le cas général, on pose :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k}x^{n-2k} = a_0x^n + a_2x^{n-2} + \dots + a_{2k}x^{n-2k} + \dots \qquad \text{avec } a_0 = 1$$

où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à n/2.

Expliciter un système linéaire satisfait par les nombres a_{2k}, où $0 \leq 2k \leq n$, et montrer que ce système admet une solution et une seule (que l'on ne demande pas d'expliciter). Donner l'expression du coefficient a_2.

3°) A partir de la suite (P_n), déterminer, selon les valeurs de λ, l'ensemble E_λ des solutions de (1).

4°) On se propose d'établir que, pour tout nombre réel x et tout entier $n \geq 2$:

$$(3) \qquad P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{n^2-1}{4n^2-1} P_{n-2}(x) = 0$$

a) On considère, pour $n \geq 2$, la fonction polynôme :

$Q_n(x) = (x^2 - 1) P'_n(x) - nxP_n(x)$.

Déterminer le monôme de plus haut degré de Q_n.

Montrer que $Q'_n(x) = (n+2)[nP_n(x) - xP'_n(x)]$, et calculer $(x^2 - 1) Q''_n(x) + 4xQ'_n(x)$ en fonction de Q_n seulement.

En déduire que :

$$(4) \qquad (x^2 - 1) P'_n(x) - nxP_n(x) + \frac{n(n+2)}{2n+1} P_{n-1}(x) = 0$$

b) En dérivant la relation (4), et en recourant par exemple à l'expression de la dérivée de Q_n obtenue précédemment, donner une relation entre P_n, P'_n et P'_{n-1}.

En utilisant à nouveau la relation (4), en déduire la relation (3).

II - ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SUITE $(P_n(x))$.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$(5) \qquad u_n = u_{n-1} + \frac{1}{9}\left[(u_{n-1} - u_{n-2}) + \frac{3}{4n^2-1} u_{n-2} \right]$$

avec $n \geq 2$, et les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1 + 1/9$.

1°) En remarquant que :

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right] ;$$

calculer pour tout entier $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2-1} .$$

Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

2°) On se propose, dans cette question, d'étudier la suite (u_n) définie ci-dessus.

a) Montrer, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq u_{n-1} \geq 1$.

b) Prouver que l'on a pour tout entier $n \geq 2$:

$$(6) \qquad u_n = u_1 + \frac{1}{9}\left[(u_{n-1} - u_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{4k^2-1} u_{k-2} \right]$$

et en déduire, pour tout entier naturel n, que $u_n \leq 6/5$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et, à l'aide de (6), donner un encadrement de sa limite L permettant d'en obtenir une valeur décimale approchée à 0,01 près.

3°) On reprend dans cette question les notations de la première partie et, pour tout entier naturel n et tout nombre réel $t > 0$, on pose :

$$u_n(t) = \frac{2^n}{e^{nt}} P_n\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$$

a) Montrer que, pour tout nombre réel x strictement supérieur à 1, il existe un nombre réel $t > 0$ et un seul tel que :

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

b) Calculer $u_0(t)$ et $u_1(t)$, et montrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$(7) \qquad u_n(t) - u_{n-1}(t) = e^{-2t}\left[(u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)) + \frac{3}{4n^2-1} u_{n-2}(t) \right]$$

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, les fonctions u_n et u_n-u_{n-1} sont strictement positives et décroissantes sur $]0, +\infty[$.

u_{n-1}

d) Expliciter le réel e^t lorsque $x = 5/3$, et montrer que, dans ce cas, les suites (u_n) et $(u_n(t))$ définies respectivement par les relations (5) et (7) sont les mêmes.

On suppose que $x \geq 5/3$. Déduire des résultats précédents que la suite $(u_n(t))$ converge vers une limite strictement positive L(x) que l'on ne demande pas d'expliciter, et en déduire un équivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.