Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ÉCOLE EUROPÉENNE DES AFFAIRES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

Mathématiques II

OPTION : Générale

Mardi 3 Mai 1988, de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large .

Le but du problème est l'étude des réalisations de trois « face » consécutifs dans une suite de parties de pile ou face, ce qui fait l'objet de la partie III. À cet effet, on s'intéresse tout d'abord dans la partie I aux puissances de deux matrices, puis, dans la partie II, au comportement asymptotique d'une suite.

La répétition d'un même événement dans une suite de tirages indépendants constitue un modèle commode pour l'étude de certains problèmes de gestion, notamment de réapprovisionnement des stocks.

Partie I

On considère les deux matrices M et N suivantes :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \qquad N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&1&1&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2, M^3 *et* M^4. En déduire la relation :

$$4M^4 - 2M^3 - M^2 - M = 0 \qquad (1)$$

2. Calculer N^2, N^3 *et* N^4. En déduire la relation :

$$8N^4 - 12N^3 + 2N^2 + N + I_4 = 0 \qquad (2)$$

Partie II

On étudie dans cette partie la suite $(q_n)_{n \geqslant 1}$ telle que : $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = \dfrac{1}{8}$ et vérifiant pour $n \geqslant 1$ la relation :

$$8q_{n+3} = 4q_{n+2} + 2q_{n+1} + q_n \tag{3}$$

À cet effet, on considère la fonction g suivante, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$$

1. *a*) Étudier et représenter graphiquement la fonction g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une racine réelle r et une seule.

2. *a*) Donner l'équation $y = t(x)$ de la tangente en $x = 1$ à la courbe représentative de g. Calculer la racine ρ de l'équation $t(x) = 0$.

b) Calculer $g(\rho)$ et $g(\rho - 0{,}01)$. Donner un encadrement de r d'amplitude 0,01.

3. *a*) Montrer qu'il existe un réel a et un seul, que l'on exprimera en fonction de r, tel que, pour tout réel x :

$$g(x) = (x - r)\left(8x^2 + ax + \frac{1}{r}\right)$$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, outre la racine réelle r, deux racines complexes z et $\bar{z}$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter). Évaluer le produit $z \cdot \bar{z}$ de ces deux racines. Exprimer $|z|$ en fonction de r et prouver que $|z| < r$.

4. Soit E l'ensemble des suites réelles ou complexes $(u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant la relation suivante, pour tout entier naturel non nul n :

$$8u_{n+3} = 4u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n$$

a) Montrer que les suites $(r^n)_{n \geqslant 1}$, $(z^n)_{n \geqslant 1}$, $(\bar{z}^n)_{n \geqslant 1}$ appartiennent à E.

b) On considère le système d'équations :

$$\begin{aligned} \alpha r + \beta z + \gamma \bar{z} &= 0 \\ \alpha r^2 + \beta z^2 + \gamma \bar{z}^2 &= 0 \\ \alpha r^3 + \beta z^3 + \gamma \bar{z}^3 &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

montrer que le système admet une solution et une seule (α, β, γ). (on pourra montrer qu'il est de CRAMER).

Montrer que : $\alpha = \dfrac{1}{8r^3 + ar^2 + 1}$, où a est le réel introduit dans la question précédente.

Prouver que $\bar{\beta} = \gamma$. (On ne demande pas d'expliciter β et γ.)

c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$q_n = \alpha\, r^n + \beta\, z^n + \overline{\beta\, z^n} \qquad \text{et} \qquad |q_n - \alpha\, r^n| \leqslant \frac{2\,|\beta|}{(8r)^{n/2}}$$

d) Établir que : $q_{\cancel{x}\,n} \sim \alpha\, r^n$ quand n tend vers l'infini. Calculer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n}$.

5. *a*) À l'aide de la relation (3) définissant (q_n), donner un algorithme permettant de calculer q_k pour $k \leqslant n$ et obtenir ainsi des valeurs approchées de q_k pour $k \leqslant 15$ (que l'on donnera avec six décimales), puis du quotient $\dfrac{q_{k+1}}{q_k}$ (avec quatre décimales).

On écrira plutôt un programme à T.P.

b) En procédant comme dans la question 2, donner un encadrement de r d'amplitude 0,000 1, puis une valeur approchée de α.

Partie III

A On effectue une suite infinie de pile ou face avec une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire Y_n prenant pour valeur :

0 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « pile » ;

1 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « face », celui-ci étant le premier, ou le quatrième, ou le septième,..., ou le $(3k+1)^{\text{ième}}$,... « face » obtenu depuis le précédent « pile » (ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti) ;

2 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « face », celui-ci étant le deuxième, ou le cinquième, ou le huitième,..., ou le $(3k+2)^{\text{ième}}$,... « face » obtenu depuis le précédent « pile » (ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti) ;

3 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « face », celui-ci étant le troisième, ou le sixième, ou le neuvième,..., ou le $(3k+3)^{\text{ième}}$,... « face » obtenu depuis le précédent « pile » (ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti).

On dit qu'une série de trois « face » consécutifs s'achève à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jet si et seulement si l'événement $[Y_n = 3]$ est réalisé.

Exemple. Soit la suite de résultats (F désigne « face » et P désigne « pile ») :

numéro du jet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14...
résultat	P	F	F	P	P	P	F	F	F	F	F	F	P	F....

Alors : $Y_1 = 0$, $Y_2 = 1$, $Y_3 = 2$, $Y_4 = 0$, $Y_5 = 0$, $Y_6 = 0$, $Y_7 = 1$, $Y_8 = 2$, $Y_9 = 3$, $Y_{10} = 1$, $Y_{11} = 2$, $Y_{12} = 3$, $Y_{13} = 0$, $Y_{14} = 1$,... et trois « face » consécutifs ont été obtenus aux neuvième, douzième,... jets.

1. Exprimer pour $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$ et $i = 3$ les probabilités $P([Y_{n+1} = i])$ en fonction des probabilités $P([Y_n = j])$ pour $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$ et $j = 3$.

Paraphraseurs s'abstenir

2. On pose : $a_n = P([Y_n = 0])$, $b_n = P([Y_n = 1])$, $c_n = P([Y_n = 2])$, $d_n = P([Y_n = 3])$. Pour tout entier naturel non nul n, soit V_n la matrice-colonne définie par :

$$V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$V_{n+1} = M V_n$$

où la matrice M est définie dans la partie I.

b) En multipliant à droite la relation (1) par V_{n-1} (où $\underline{n \geqslant 2}$), établir une relation entre V_{n+3}, V_{n+2}, V_{n+1} et V_n, puis entre d_{n+3}, d_{n+2}, $\overline{d_{n+1}}$ et d_n.

c) Calculer d_1, d_2, d_3, d_4.

en TP4

d) À l'aide de la relation définissant (d_n), donner un algorithme permettant de calculer d_k pour $k \leqslant n$. Obtenir ainsi des valeurs approchées de d_k pour $k \leqslant 15$ (que l'on donnera avec six décimales). Que constate-t-on ?

e) Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{3k+1} = d_{3k+2}$.

B On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire X indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, on a obtenu trois fois de suite le résultat « face ». Pour tout entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire Z_n :

— prenant pour valeur 3 si trois « face » consécutifs sont obtenus à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jet ou ont été déjà obtenus à l'issue d'un jet antérieur ;

— prenant sinon pour valeur :

0 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « pile » ;

1 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « face », ce « face » étant le premier obtenu depuis le précédent « pile » (ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti) ;

2 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « face », ce « face » étant le second obtenu depuis le précédent « pile » (ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti).

L'événement $[X \leqslant n]$ est donc réalisé si et seulement si l'événement $[Z_n = 3]$ est réalisé.

Exemple. En reprenant la suite de pile ou face donnée dans la partie III.A, on a : $X = 9$, $Z_1 = 0$, $Z_2 = 1$, $Z_3 = 2$, $Z_4 = 0$, $Z_5 = 0$, $Z_6 = 0$, $Z_7 = 1$, $Z_8 = 2$ et, pour $n \geqslant 9$, $Z_n = 3$.

1. Exprimer pour $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$ et $i = 3$ les probabilités $P([Z_{n+1} = i])$ en fonction des probabilités $P([Z_n = j])$ pour $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$ et $j = 3$.

2. On pose : $a'_n = P([Z_n = 0])$, $b'_n = P([Z_n = 1])$, $c'_n = P([Z_n = 2])$, $d'_n = P([Z_n = 3])$. Pour tout entier naturel non nul n, soit W_n la matrice-colonne définie par :

$$W_n = \begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \\ c'_n \\ d'_n \end{pmatrix}$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$W_{n+1} = N W_n$$

où la matrice N est définie dans la partie I.

b) En multipliant à droite la relation (2) par W_n, établir une relation entre W_{n+4}, W_{n+3}, W_{n+2}, W_{n+1} et W_n, puis entre d'_{n+4}, d'_{n+3}, d'_{n+2}, d'_{n+1} et d'_n.

c) Calculer $P([X = 1])$, $P([X = 2])$, $P([X = 3])$ et $P([X = 4])$. Montrer que, pour $n \geqslant 2$:

$$P([X = n]) = d'_n - d'_{n-1}$$

d) Comparer $P([X = n])$ à la suite (q_n) étudiée dans la partie II. En déduire un équivalent de $P([X = n])$ et la limite de la suite $\dfrac{P([X = n+1])}{P([X = n])}$.

complément

↓

e) Montrer que $E(X)$ existe et l'exprimer en fonction de $\alpha, \beta, \delta, r, z, \bar{z}$

Montrer que si u est un zéro de g dans $\mathbb{C}$: $\dfrac{u}{(u-1)^2} = 104u^2 + 44u + 14$

En déduire que $E(X) = 14$.

Retrouver $E(X) = 14$ en utilisant la relation (3).

f) Exprimer à l'aide d'un raisonnement probabiliste direct $p(X = n+3)$ en fonction de $p(X = n)$, $p(X = n+1)$ et $p(X = n+2)$ pour $n \geqslant 1$ (regarder les 1ers jets)