ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la
Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Vald'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

MATHEMATIQUES I

Option générale
Lundi 9 mai 1988 de 14h à 18h

Le problème a pour but l'étude d'un algorithme d'approximation de fonctions continues sur [0,1] par des fonctions polynômes.

Les parties II, III et IV sont indépendantes.

Notations:

On associe, à tout entier naturel n non nul et à toute fonction numérique f continue sur $[0,1]$, la fonction polynôme, notée f_n, définie par :

$$(1) \quad \forall x \in [0,1] \qquad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Rappel:

Soit h une fonction numérique définie sur $[0,1]$. S'il existe un réel positif k tel que :

$$\forall (x, x') \in [0,1]^2 \qquad |h(x) - h(x')| \leq k|x - x'|$$

on dit que h est k-Lipschitzienne sur $[0,1]$.

I - Etude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto x^2$

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Déterminer la fonction polynôme f_n associée à f par (1) dans les deux cas particuliers suivants:

 a) $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = 1$,
 b) $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = x$.

2. f désignant une fonction numérique continue sur $[0,1]$, on note g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = x f(x)$, f_n et g_n les fonctions respectivement associées à f et g par (1) et f'_n la dérivée de f_n.

Vérifier que:

(2) $\forall x \in [0, 1] \quad \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = g_n(x) - x f_n(x)$

3. On suppose que

$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = x^2.$

a) déterminer f_n ,

b) calculer $\sup_{x \in [0,1]} \left| f_n(x) - f(x) \right|$

4. Déduire des résultats précédents que :

(3) $\forall x \in [0, 1] \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

II - Etude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto \exp x$.

Dans toute cette partie, f_n désigne la fonction polynôme associée, pour $n \geq 1$, à :

$$f : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \exp x \end{array}$$ par la relation (1) .

1. Vérifier que: $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = \left[x \left(\exp \frac{1}{n} - 1\right) + 1\right]^n$.

2. Déterminer, pour tout x de $[0, 1]$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

3. On suppose que $x \in]0, 1[$.

a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2, en zéro, de :

$u \longmapsto \ln [x (\exp u - 1) + 1]$.

b) En déduire un équivalent, quand n tend vers $+\infty$ de :

$f_n(x) - \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

4. Etudier les variations de la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par :

$$\psi(x) = n \ln\left[x\left(\exp \frac{1}{n} - 1\right) + 1\right] - x$$

(On montrera, à l'aide du théorème de Rolle que ψ' possède au moins une racine sur $]0,1[$ et, en calculant ψ' , que cette racine x_n est unique).

5. En déduire que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad \exp x \leq f_n(x) \leq \exp\left[x + \psi(x_n)\right],$$

et que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left|f_n(x) - \exp x\right| \leq e\left[\exp(\psi(x_n)) - 1\right].$$

6. Donner, en utilisant un développement limité de $\psi(x_n)$ à un ordre suffisant, un équivalent de $\exp(\psi(x_n)) - 1$ quand $n \to +\infty$.

III - Etude des fonctions f_n associées à $f : \quad x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

Dans toute cette partie, f_n désigne la fonction polynôme associée, pour $n \geq 1$, à :

$$f : \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{1+x} \end{array} \qquad \text{par la relation (1).}$$

1. Détermination de f_n :

Vérifier que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad f_n(x) = n \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n+k} x^k (1-x)^{n-k} = n \int_0^1 u^{n-1} [1 - x(1-u)]^n \, du .$$

2. Majoration de $|f'_n(x)|$:

a) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que:

$$\forall \ (t, t') \in [0, 1]^2 \qquad \left|t^n - t'^n\right| \leq n\left|t - t'\right|$$

b) En déduire que:

$$\forall (x, x') \in [0, 1]^2 \text{ et } \forall u \in [0, 1] \qquad \left|[1 - x(1-u)]^n - [1 - x'(1-u)]^n\right| \leq n(1-u)\left|x - x'\right|,$$

puis que f_n est 1-Lipschitzienne sur $[0,1]$.

c) En déduire un majorant de

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left|f'_n(x)\right|.$$

3. Majoration de $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

a) Utiliser la relation (2) et l'égalité évidente $x f(x) = 1 - f(x)$ pour démontrer que:

$$\forall x \in [0, 1] \qquad \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = 1 - (1+x) f_n(x) .$$

b) En déduire que:

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x} \right| \leq \frac{1}{4n} .$$

IV - Convergence de la suite (f_n) vers f sur [0,1] :

Dans toute cette partie, on désigne par f une fonction numérique continue sur [0,1] et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, par f_n la fonction polynôme associée à f par (1).

1. Convergence de $\left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)_{n \geq 1}$:

a) On note, pour $0 \leq k \leq n$:

$$I_n(k) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx .$$

Déterminer, pour $0 \leq k \leq n-1$, une relation de récurrence entre $I_n(k)$ et $I_n(k+1)$.

En déduire $I_n(k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

b) Calculer, en fonction de f, $\int_0^1 f_n(x) dx$.

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

2. Etude de $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ pour f de classe C^1 sur [0,1] :

On suppose f de classe C^1 sur [0,1].

a) Montrer qu'il existe un réel positif k tel que f soit k-Lipschitzienne sur [0,1]. En déduire que,
si $M_0(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, on a :

$$\forall \alpha > 0 \text{ et } \forall (x, x') \in [0, 1]^2 \quad |f(x') - f(x)| \leq k\alpha + 2\frac{M_0(f)}{\alpha^2}(x' - x)^2 .$$

(on distinguera les 2 cas $|x' - x| \leq \alpha$ et $|x' - x| > \alpha$).

b) En utilisant la relation (3), montrer que :

$$\forall \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2} .$$

d) En déduire l'existence d'un nombre réel positif A tel que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{A}{\sqrt[3]{n}} .$$

(on pourra étudier, sur $\mathbf{R}^*_+$, la fonction : $\alpha \longmapsto k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2}$)

Retrouver ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx .$$

3. Vitesse de convergence de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f si f est de classe C^2 sur [0,1] :

Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur [0,1].

a) Démontrer que,
si $M_2(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$, on a :

$$\forall (x, x') \in [0, 1]^2 \quad |f(x') - f(x) - (x' - x)f'(x)| \leq \frac{M_2(f)}{2}(x' - x)^2 .$$

b) En déduire que:

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{M_2(f)}{8n} ,$$

et montrer, par un exemple, que cette majoration est la meilleure possible.