ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Vald'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

MATHEMATIQUES II

Toutes Options
Mardi 10 mai 1988 de 8h à 12h

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
Une urne contient n boules numérotées 1, 2, 3, ..., n. On y effectue une suite de tirages avec remise, ce qui signifie qu'à chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
Soit X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du tirage où, pour la première fois, chacune des n boules a été obtenue au moins une fois.
L'objet du problème est l'étude de la variable aléatoire X_n (partie I) et du comportement asymptotique de son espérance (partie II).

PARTIE I

On désigne par p un entier naturel non nul. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on considère l'événement B_i défini par: "la boule numérotée i n'est pas apparue au cours des p premiers tirages".

1°) Etude de la variable aléatoire X_2

Dans cette question, on suppose que n = 2, ce qui revient à supposer que l'urne ne contient que 2 boules numérotées 1 et 2.

a) Soit x un nombre réel de l'intervalle [0, 1[. Calculer les sommes:

$$S_p(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^p \qquad et \qquad \Sigma_p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + px^{p-1}$$

Déterminer leurs limites respectives S(x) et Σ(x) quand p tend vers l'infini.

b) Calculer $P([X_2=p])$. En déduire l'espérance de X_2.

2°) <u>Etude de la variable aléatoire X_3</u>

Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

a) On rappelle la formule donnant la probabilité de la réunion de deux événements A et B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A l'aide de celle-ci, établir une formule analogue donnant la probabilité de la réunion $A \cup B \cup C$ de trois événements A, B, C.

b) Soient i, j, k trois entiers distincts appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Calculer $P(B_i)$, $P(B_i \cap B_j)$, $P(B_i \cap B_j \cap B_k)$ et en déduire $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

c) Exprimer $P([X_3 > p])$ à l'aide de $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$, et en déduire $P([X_3 = p])$.

d) Calculer l'espérance de X_3 (que l'on exprimera sous forme de fraction irréductible).

3°) <u>Etude de la loi de X_n</u>

Dans cette question, on revient au cas général.

a) Calculer en fonction de n et p les probabilités $P(B_i)$, $P(B_i \cap B_j)$ pour $i \neq j$. De façon générale, si $i_1, i_2, \dots, i_k$ sont k entiers distincts appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, calculer en fonction de n, p et k la probabilité de l'intersection $B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \dots \cap B_{i_k}$.

b) En déduire, à l'aide de la formule de Poincaré (ou formule du crible), la probabilité de la réunion $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$.

c) Que vaut $P([X_n > p])$? En déduire que:

$$P([X_n = p]) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} \frac{k}{n} (1 - \frac{k}{n})^{p-1}$$

d) En déduire l'identité suivante pour tout entier q tel que $0 \leq q < n$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k k^q = 0$$

4°) <u>Calcul de l'espérance $E(X_n)$</u>

On pose désormais:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

a) Etablir pour tout réel x de [0, 1] la formule suivante:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} x^{k-1}$$

et en déduire que:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n$$

b) Déduire des résultats précédents que l'on a: $E(X_n) = n.H_n$.

c) Ecrire un algorithme de calcul de $E(X_n)$, et en déduire des valeurs décimales approchées de $E(X_n)$ pour $n = 10$, $n = 20$, $n = 50$, $n = 100$ (on donnera ces valeurs avec les deux premières décimales fournies par la calculatrice).

PARTIE II

Dans cette partie, H_n est le nombre défini en I.4°.

1°) Etude de $H_n - \ln(n)$

a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, prouver que l'on a pour tout réel strictement positif x:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

b) On considère les suites définies pour $n \geq 1$ par:

$$u_n = H_n - \ln(n) \qquad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

Etudier leur sens de variation et montrer qu'elles convergent vers une limite commune que l'on notera γ.

c) Montrer que: $u_n - 1/n \leq \gamma \leq u_n$, et en déduire comment il suffit de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de γ à 0,0001 près.

2°) Etude d'une fonction auxiliaire

Dans cette question, x désigne un réel positif, et l'on pose:

$$F(x) = \frac{x}{2(1+x)} + \frac{x}{2} - \ln(1+x)$$

a) Calculer F' et montrer que:

$$0 \leq F(x) \leq \frac{x^3}{6}$$

b) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de F en 0. En déduire le plus petit nombre réel positif k tel que l'on ait pour tout x positif:

$$F(x) \leq kx^3$$

3°) Etude asymptotique de H_n

On considère la suite définie pour $n \geq 1$ par:

$$w_n = H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$$

a) Soit p un entier strictement supérieur à n. Calculer la somme des termes $w_{k+1} - w_k$ pour $n+1 \leq k \leq p$, et en déduire l'existence et la valeur de:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k)$$

b) Exprimer $w_{k+1} - w_k$ en fonction de $F(1/k)$. Par comparaison d'une série à une intégrale, en déduire que:

$$0 \le r_n \le \frac{1}{12n^2}$$

c) Comment suffit-il de choisir n pour avoir:

$$0 \le \gamma - (H_n - \ln n - \frac{1}{2n}) \le 0,0001$$

Calculer la valeur approchée de γ ainsi obtenue, que l'on donnera avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

4°) Conclusion

Démontrer qu'il existe des réels a, b, c que l'on explicitera, et une suite (ε_n) de limite nulle telle que l'on ait:

$$E(X_n) = an.\ln(n) + bn + c + \varepsilon_n$$

Retrouver ainsi les résultats numériques demandés au I.4° en donnant à chaque fois un majorant de l'erreur commise.

==============================