Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1990

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Lundi 30 avril 1990 de 14 heures à 18 heures

Les deux problèmes sont indépendants.

1er PROBLÈME

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; E désigne l'espace vectoriel sur IR des fonctons polynômiales de IR dans IR de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout entier $k \in [0\,;n]$, μ_k est la fonction définie sur IR par : $\forall t \in \mathbb{R},\ \mu_k(t) = t^k$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in [0\,;n]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^k e^t\,dt$ est convergente.

2. Soit f un élément de E. Montrer qu'on peut définir une fonction g de IR dans IR par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^{t}dt.$$

Cette fonction g dépend de f et est notée L(f).

3. a. Calculer $L(\mu_0)$, $L(\mu_1)$, $L(\mu_2)$.

b. Montrer que, pour tout entier $k \in [0\,;n-1]$: $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)\,L(\mu_k)$.

En déduire $\displaystyle L(\mu_k) = (-1)^k\,k!\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}\mu_j.$

c. Montrer que, pour tout élément f de E, L (f) appartient à E.

On considère l'application $L : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto L(f) \end{array}$.

4. a. Montrer que L est une application linéaire et injective.

b. Ecrire la matrice M représentant l'endomorphisme L de E dans la base $(\mu_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1} (on pourra utiliser 3. b.).

5. a. Soient λ une valeur propre de L, et f un vecteur propre de L associé à la valeur propre λ.
Montrer que λ est non-nul et que, pour tout réel x, $(1 - \lambda) f(x) = \lambda f'(x)$.

Soit φ la fonction définie sur IR par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^{\frac{\lambda - 1}{\lambda} x} f(x)$.

Montrer que φ est constante.

b. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de L.
Est-ce que L est diagonalisable ?

2ème PROBLÈME

N.B. La partie C est largement indépendante des parties A et B.
ln désigne le logarithme népérien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n$.

PARTIE A. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que v_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $-\frac{1}{2n^2}$.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$?

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.
On note γ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

PARTIE B. Expression intégrale de γ.

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ existe,

et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\left(1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) dx$ existe.

2. a. Montrer que, pour tout $t \in \left]-1 ; +\infty\right[$: $\ln(1 + t) \leq t$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0 ; n], \quad \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction $\varphi_n : \left[0 ; \sqrt{n}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_n(x) = x + n\, ln\left(1-\frac{x}{n}\right) - ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right).$$

d. En déduire : $\forall n \in IN^*, \forall x \in [0\,;n]$, $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)e^{-x} \le \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge vers I.

4. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}dy$ existent et sont égales.

On note $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx$, et, pour tout $n \in IN^*$, $J_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$.

5. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geq 1}$ converge vers J.

6. a. Montrer que, pour tout $n \in IN^*$, l'intégrale $K_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx$ existe.

b. Établir, pour tout $n \in IN^*$: $K_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

7. a. Montrer, pour tout $n \in IN^*$: $I_n - J_n = K_n - ln\, n$.

b. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}}}{x}dx = \gamma$.

PARTIE C. Calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

On utilise ici le résultat de la question B7b :

$$\gamma = I - J \quad \text{où} \quad I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}dy.$$

1. a. Montrer, pour tout $n \in IN^*$ et tout $x \in [0\,;1]$:

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k x^k}{k\,!} \le e^{-x} \le \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k x^k}{k\,!}.$$

b. En déduire, pour tout $n \in IN^*$:

$$\sum_{l=0}^{2n-1}\frac{(-1)^l}{(l+1)\,!\,(l+1)} \le I \le \sum_{l=0}^{2n-2}\frac{(-1)^l}{(l+1)\,!\,(l+1)},$$

puis $$-\frac{1}{(2n)!\ 2n} \leq \mathrm{I} - \sum_{l=0}^{2n-2} \frac{(-1)^l}{(l+1)!\ (l+1)} \leq 0 .$$

c. Donner une valeur approchée de I à $0,5.10^{-3}$ près.

2. a. Montrer : $\forall x \in [1 ; +\infty[, \quad 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

b. Vérifier que le réel $x_0 = 7$ satisfait l'inégalité : $\frac{e^{-x_0}}{x_0} < 0,25 . 10^{-3}$.

c. On admet que $\int_1^7 \frac{e^{-y}}{y}\, dy$ vaut $0,2193$ à $0,25 . 10^{-3}$ près .

Donner une valeur approchée de J à $0,5.10^{-3}$ près.

d. Conclure.