CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et Concours

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Lundi 7 mai 1990, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire**, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long × 15 cm de large, à raison d'une seule calculatrice par candidat.

Soit f une application continue de $[a,\ b]$ dans IR, avec $a < b$. L'objet du problème est l'étude d'approximations de l'intégrale :

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

par la méthode des rectangles, c'est-à-dire par la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \quad \text{avec} \quad : \quad x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

puis, de façon plus performante, par les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$v_n = 2\,u_{2n} - u_n \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{4\,v_{2n} - v_n}{3}.$$

PARTIE I : Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on suppose que $[a,\ b] = [0,\ 1]$ et que :

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2}\,.$$

1. Écrire en PASCAL un algorithme de calcul de u_n lorsque l'entier naturel non nul n est donné.

À l'aide de cet algorithme, remplir le tableau suivant :

u_1	v_1	w_1
u_2	v_2	w_2
u_4	v_4	w_4
u_8	v_8	
u_{16}		

(On donnera les résultats numériques de ce tableau avec six décimales.)

2. Calculer l'intégrale J. (On pourra poser $x = \tan t$.)

Évaluer la précision des résultats numériques obtenus ci-dessus.

PARTIE II : Étude d'un second exemple

Dans cette partie, on considère un réel λ strictement positif et différent de 1. On suppose que $[a,\ b] = [0,\ \pi]$ et que :

$$f(x) = \ln\,\left(\lambda^2 - 2\,\lambda\,\cos x + 1\right)\,.$$

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer sous forme trigonométrique les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$y^{2n} - 1 = 0.$$

b) En déduire, en comparant leurs coefficients dominants et leurs racines, l'égalité suivante entre fonctions polynômes :

$$y^{2n} - 1 = \left(y^2 - 1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(y^2 - 2\,y\,\cos\frac{k\,\pi}{n} + 1\right).$$

2. a) Déduire de la question précédente une expression simplifiée de u_n et de v_n.

b) En distinguant les cas $\lambda < 1$ et $\lambda > 1$, calculer l'intégrale J en déterminant la limite de la suite (u_n), puis donner des équivalents de $u_n - J$ et de $v_n - J$.

PARTIE III : Étude du cas général

On suppose désormais que la fonction f est de classe C^4 sur $[a,\ b]$. Pour tout nombre entier naturel k tel que $1 \leq k \leq 4$, on pose :

$$M_k = \sup_{a \leq x \leq b} \left| f^{(k)}(x) \right|.$$

(On rappelle que la notation $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{ième}$ de la fonction f.)

1. Soit $[\alpha,\ \beta]$ un segment inclus dans $[a,\ b]$. On considère la fonction auxiliaire p définie sur $[\alpha,\ \beta]$ par la relation :

$$p(x) = \int_\alpha^x f(t)\ \mathrm{d}t - (x - \alpha)\ f(\alpha).$$

a) Calculer les deux premières dérivées de p.

b) Montrer que, pour tout élément x de $[\alpha,\ \beta]$, on a :

$$-M_1 \leq p''(x) \leq M_1.$$

En déduire par intégration un encadrement de $p(x)$ pour $\alpha \leq x \leq \beta$, puis établir l'inégalité suivante :

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t - (\beta - \alpha)\ f(\alpha) \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}\ M_1.$$

c) En appliquant cette inégalité aux segments $[x_k,\ x_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n-1$, prouver enfin que :

$$|J - u_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2\ n}\ M_1.$$

2. Soit $[\alpha,\ \beta]$ un segment inclus dans $[a,\ b]$. On considère la fonction auxiliaire q définie sur $[\alpha,\ \beta]$ par la relation :

$$q(x) = p(x) - \frac{(x - \alpha)[f(x) - f(\alpha)]}{2}.$$

a) Calculer les deux premières dérivées de q.

b) Établir l'inégalité suivante :

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t - (\beta - \alpha)\ f(\alpha) - \frac{(\beta - \alpha)[f(\beta) - f(\alpha)]}{2} \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}\ M_2.$$

(On pourra encadrer $q''(x)$ pour $\alpha \leq x \leq \beta$, puis, par intégration, en déduire un encadrement de $q(x)$.)

c) Prouver enfin que :

$$\left| J - u_n - \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{2\ n} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12\ n^2}\ M_2.$$

3. On considère cette fois la fonction auxiliaire r définie sur $[\alpha,\ \beta]$ par la relation :

$$r(x) = q(x) + \frac{(x-\alpha)^2[f'(x) - f'(\alpha)]}{12}\ .$$

En procédant encore de la même manière, établir que :

$$\left| J - u_n - \frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{2\,n} + \frac{(b-a)^2[f'(b)-f'(a)]}{12\,n^2} \right| \leq \frac{(b-a)^5}{720\,n^4}\,M_4.$$

4. Déterminer à l'aidee des résultats précédents le développement limité à l'ordre 3 de u_n, c'est-à-dire des nombres réels A, B, C et D tels que :

$$u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + \frac{\varepsilon_n}{n^3} \qquad \text{avec :} \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

En déduire les développements limités à l'ordre de 3 de v_n et de w_n. Conclure.