ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

MATHEMATIQUES II

Option générale

Lundi 14 mai 1990 de 8h à 12h

L'objet du problème consiste en l'étude de la complexité de deux algorithmes. Dans la partie I, on s'intéresse à un premier algorithme, permettant la recherche du plus grand élément d'un tableau de nombres non triés, et dans la partie II, à un second algorithme permettant la recherche des deux plus grands éléments d'un tableau de nombres non triés.

PRELIMINAIRES.

1°) On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n) .$$

A cet effet, on introduit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - 1/n$.

2 a) Etablir l'encadrement suivant:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

1 b) En déduire le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), et prouver qu'elles sont adjacentes *(on rappelle que deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, la différence des deux ayant pour limite 0).*

2°) On note γ la limite commune des suites (u_n) et (v_n) et, pour évaluer numériquement γ, on se propose d'utiliser la moyenne arithmétique m_n de u_n et v_n:

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

3 a) Prouver l'inégalité suivante:

$$|m_n - \gamma| \leq \frac{1}{2n}.$$

3 b) Ecrire (en PASCAL) un algorithme permettant de calculer m_n pour un entier naturel non nul n donné. Préciser en particulier m_5 et m_{50} et en déduire des valeurs approchées de γ à 0,1 et 0,01 près. Que constate-t-on a posteriori sur la qualité de

3 l'approximation réalisée par m_5 ?

3°) On améliore dans cette question la majoration obtenue pour $|m_n - \gamma|$.

a) Comparer $m_{k+1} - m_k$ à l'intégrale:

3 (1 calcul de $m_{k+1} - m_k$)

$$\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)\,dt}{t^3}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante:

3

$$0 \leq m_{k+1} - m_k \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}.$$

En déduire par sommation un encadrement de $m_{n+p} - m_n$, puis de $\gamma - m_n$.

5 A l'aide de la valeur de m_{50} calculée à la question 2°, quel encadrement de γ obtient-on finalement?

****

PARTIE I.

On considère une urne remplie de n boules $(n \geq 1)$ numérotées respectivement 1, 2, ..., n. On extrait ces n boules, une à une et sans remise, et l'on désigne par $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ les variables aléatoires indiquant, dans cet ordre, les numéros des boules ainsi obtenues.

Pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$, on note d'autre part X_p la variable aléatoire indiquant le plus grand des p numéros obtenus au cours des p premiers tirages, autrement dit: $X_p = \sup(Z_1, Z_2, ..., Z_p)$.

2 1°) On se propose de déterminer $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leq n$.

On pose $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$. On demande de préciser:

a) le nombre de parties A à p éléments choisis dans l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

2 b) le nombre de suites $(a_1, a_2, ..., a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

2 c) le nombre de suites $(a_1, a_2, ..., a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

2 d) le nombre de suites $(a_1, a_2, ..., a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p° position.

4 e) le nombre de suites $(a_1, a_2, ..., a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p° position.

4 f) la probabilité $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leq n$.

2°) Pour $1 < p \leq n$, on note B_p la variable aléatoire prenant pour valeurs 1 si l'événement $Z_p > X_{p-1}$ est réalisé, et 0 sinon.
4 Montrer que l'espérance de B_p est égale à $1/p$, et donner l'expression et l'interprétation de $E(B_2 + B_3 + \ldots + B_n)$.

3°) On considère l'algorithme suivant, dans lequel toutes les variables sont de type entier, et où l'on a affecté un entier supérieur à 1 à la variable n, et les entiers 1, 2, ..., n dans un ordre quelconque aux variables Z[1], Z[2], ..., Z[n]:

```
begin
X := Z[1];
for p:=2 to n do
     if Z[p] > X then X := Z[p];
end;
```

2 a) Indiquer les valeurs successivement prises par X au cours de l'algorithme:
- d'une part lorsque Z[1] = 1, Z[2] = 2, ..., Z[n] = n.
2 - d'autre part lorsque Z[1] = n, Z[2] = n-1, ..., Z[n] = 1.
2 b) On revient au cas général. Indiquer la valeur contenue dans la variable X à l'issue de l'algorithme. Déterminer le nombre de comparaisons (>) effectuées entre
1 les valeurs de deux variables ainsi que le nombre maximal et le nombre minimal
2 d'affectations (:=) effectuées.
c) A l'aide des résultats précédents, exprimer l'espérance E_n du nombre
6 d'affectations effectuées au cours de l'algorithme en fonction de u_n, puis expliciter à l'aide du nombre γ des réels a et b tels que l'on ait:

$$E_n = a \ln(n) + b + \varepsilon_n, \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0.$$

(les notations u_n et γ ont été introduites dans la partie préliminaire).

****

PARTIE II

Le contexte probabiliste est celui introduit au début de la partie précédente.
Pour $2 \leq p \leq n$, on note Y_p la variable aléatoire telle que X_p et Y_p indiquent respectivement les deux plus grands des p numéros obtenus au cours des p premiers tirages, avec $Y_p < X_p$.

6 1°) En reprenant et en adaptant le raisonnement de la question I.1°, préciser la probabilité $P(Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1})$ pour $2 < p \leq n$.

2°) Pour $2 < p \leq n$, on note C_p la variable aléatoire prenant pour valeurs 0 si l'événement $Z_p < Y_{p-1}$ est réalisé, 1 si l'événement $Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1}$ est réalisé, et 2 si
2 l'événement $X_{p-1} < Z_p$ est réalisé.
Montrer que l'espérance de C_p est égale à $3/p$.

3°) On modifie l'algorithme de la question I.3° de la façon suivante:

```
begin
if Z[2] > Z[1] then
     begin X := Z[2]; Y := Z[1]; end
     else
     begin X := Z[1]; Y := Z[2]; end;
for p:=3 to n do
     if Z[p] > Y then
           if Z[p] < X then
               Y := Z[p]
               else
               begin Y := X; X := Z[p]; end;
end;
```

a) Indiquer les valeurs successivement prises par X et Y au cours de l'algorithme:
3 - d'une part lorsque $Z[1] = 1, Z[2] = 2, \ldots, Z[n] = n$.
3 - d'autre part lorsque $Z[1] = n, Z[2] = n-1, \ldots, Z[n] = 1$.
2 b) On revient au cas général. Indiquer les valeurs contenues dans les variables X et
2 Y à l'issue de l'algorithme. Déterminer le nombre maximal et le nombre minimal de comparaisons (>) effectuées entre les valeurs de deux variables ainsi que
2 d'affectations (:=) effectuées.
c) A l'aide des résultats précédents, calculer les espérances E'_n et E''_n des nombres de comparaisons et d'affectations effectuées au cours de l'algorithme, puis expliciter à l'aide du nombre γ défini dans les préliminaires des réels a', b', c', a'', b'' tels que l'on ait:

6
6

$$\begin{cases} E'_n = a'n + b'\ln(n) + c' + \varepsilon'_n & \text{avec:} \quad \lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon'_n = 0. \\ E''_n = a''\ln(n) + b'' + \varepsilon''_n & \text{avec:} \quad \lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon''_n = 0. \end{cases}$$

****