CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Lundi 13 mai 1991, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

L'objet de ce problème est la recherche du comportement asymptotique du maximum sur $[0,\ 1]$ d'une suite de fonctions.

I. ÉTUDE DU MAXIMUM D'UNE FONCTION

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. *Variation de f*

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.

Indication. On étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^x + 1$$

c) Prouver que $f(\alpha) = \alpha - 1$.

d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

2. *Approximation de α*

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que $\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$.

c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geq 1$$

et que :

$$|\varphi(x) - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-1}|x - \alpha|$$

d) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1,\ +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$|\alpha_n - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, expliciter, à l'aide d'une calculatrice, une valeur décimale approchée $\bar{\alpha}$ de α telle que :

$$|\alpha - \bar{\alpha}| \leq 10^{-6}$$

II. ÉTUDE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

Excepté la question II. 8, la partie II est indépendante de la partie I.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions numériques définies sur $[0,\ 1]$ par la condition initiale $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1}(x) = \left[1 - x + \frac{x}{2}\ u_n(x)\right]\ u_n(x)$$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, la fonction u_n est polynomiale ; déterminer son degré et son coefficient dominant.

2. Montrer par récurrence sur n que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout élément x de $[0,\ 1]$:

$$0 < u_n(x) \leq 1$$

En déduire, toujours par récurrence sur n, que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout élément x de $[0,\ 1]$:

$$u_n'(x) \leq 0$$

3. a) Soit x un élément de $[0,\ 1]$ et n un nombre entier naturel non nul. Établir les inégalités :

$$(1 - x)^n \leq u_n(x) \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$$

b) En déduire que, lorsque x est fixé dans $[0,\ 1]$, la suite de terme général $u_n(x)$ converge ; exprimer sa limite en fonction de x.

c) Montrer que cette suite est décroissante.

Dans toute la suite du problème, on note h la fonction définie sur $[0,\ 1]$ *par la relation :*

$$h(t) = t\left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

4. a) Montrer que, pour tout couple $(a,\ b)$ d'éléments de $[0,\ 1]$:

$$|h(b) - h(a)| \leq |b - a|$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel k et pour tout élément x de $[0,\ 1]$:

$$|[u_k(x) - u_{k+1}(x)] - [u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)]| \leq x\,|u_k(x) - u_{k+1}(x)|$$

c) Montrer enfin que, pour tout nombre entier naturel k et pour tout élément x de $[0,\ 1[$:

$$0 \leq u_k(x) - u_{k+1}(x) \leq \frac{u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)}{1 - x}$$

5. Dans cette question, on fixe k dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,\ 1[$.

a) En utilisant le dernier encadrement et le sens de variation de h, montrer que :

$$x \leq \int_{u_{k+1}(x)}^{u_k(x)} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \leq \frac{x}{1 - x}$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n :

$$nx \leq \int_{u_n(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \leq \frac{nx}{1 - x}$$

6. a) Trouver un couple $(A,\ B)$ de nombres réels tel que, pour tout élément t de $]0,\ 1]$:

$$\frac{1}{h(t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1 - \dfrac{t}{2}}$$

b) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{u_n(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)}$$

en fonction de $u_n(x)$.

En conclure que :

$$\frac{2}{1 + \exp\left(\dfrac{nx}{1 - x}\right)} \leq u_n(x) \leq \frac{2}{\mathrm{e}^{nx} + 1}$$

7. Soit y un élément de $\mathbb{R}_+$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n\left(\dfrac{y}{n}\right)$.

8. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,\ 1]$ par :

$$v_n(x) = xu_n(x)$$

On note M_n le maximum de la fonction v_n sur $[0,\ 1]$.

a) Montrer que :

$$v_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \geq \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha}$$

b) Établir l'encadrement :

$$\frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha} \leq M_n \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}$$

En déduire un équivalent simple de M_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.