



ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la
Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

MATHEMATIQUES I

Option générale

Mercredi 15 mai 1991 de 8h à 12h

Dans tout le problème, on désigne par a un réel strictement positif et par K une fonction de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} de la forme:

$$K(x) = P(x) \cdot \exp\left(-\frac{x}{2a}\right)$$

où P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

L'objet du problème est la recherche des fonctions continues f de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telles que l'on ait pour tout réel positif x :

$$(1) \quad f(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t) f(t) dt.$$

Les trois parties du problème sont indépendantes les unes des autres.

PRELIMINAIRE

On considère pour tout entier naturel n l'intégrale $J_n(a)$ définie par:

$$J_n(a) = \int_0^{+\infty} t^n \exp\left(-\frac{t}{a}\right) dt.$$

En raisonnant par récurrence sur n , établir la convergence de cette intégrale et préciser sa valeur en fonction de n et a .

PARTIE I

Dans toute cette partie, on suppose que $P(x) = 1$.

1°) Soit f une solution de (1). Montrer qu'il existe un réel c tel que $f = cK$.

2°) On considère réciproquement une fonction $f = cK$, où c est un nombre réel donné.
A quelle condition sur c cette fonction est-elle solution de (1)?

3°) Etudier, selon les valeurs prises par a , l'existence des solutions de (1) et en déduire leur expression.

A SUIVRE

PARTIE II

Dans toute cette partie, on désigne par λ un nombre réel et l'on suppose que $P(x) = \lambda a + x$.

1°) Soit E l'espace vectoriel engendré par les 2 applications de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} :

$$\phi_0(x) = \exp\left(-\frac{x}{2a}\right) \quad ; \quad \phi_1(x) = \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

- a) Montrer que (ϕ_0, ϕ_1) est une base de E .
b) Soient ϕ un élément de E , et ψ la fonction définie pour $x \geq 0$ par:

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\phi(t)dt.$$

Prouver que cette intégrale $\psi(x)$ est convergente, et montrer que ψ est un élément de E .

- c) Montrer que l'application $u: \phi \in E \rightarrow u(\phi) = \psi \in E$ est un endomorphisme de E .
Etablir que sa matrice dans la base (ϕ_0, ϕ_1) est de la forme $a^2 M(\lambda)$ où $M(\lambda)$ est une matrice ne dépendant que de λ que l'on explicitera.
 u est-il un automorphisme de E ?

2°) Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle appartient à E .

3°) On considère réciproquement une fonction $f = \alpha_0 \phi_0 + \alpha_1 \phi_1$ de E , où α_0, α_1 sont des nombres réels.

- a) Etablir que cette fonction f est solution de (1) si et seulement si α_0, α_1 sont solutions d'un système de deux équations que l'on explicitera.
b) Résoudre et discuter le système obtenu.
c) Représenter dans le plan l'ensemble des couples (a^2, λ) pour lesquels l'équation (1) n'a pas de solution (on portera a^2 en abscisse et λ en ordonnée).

PARTIE III

Dans toute cette partie, on suppose que $P(x) = 3a^2 - 4ax + x^2$.

1°) On considère la matrice M définie par:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de M (avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$).
b) Déterminer un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.
(On choisira à chaque fois un vecteur propre dont la 3° composante est égale à 1).
c) En déduire une matrice inversible P telle que:

$$M = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

- d) Calculer l'inverse de la matrice P .

Tournez la page S.V.P.

2°) On considère les trois suites (u_n) , (v_n) , (w_n) définies par:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n + 6w_n & \text{et} & u_0 = 3. \\ v_{n+1} = -u_n + 2w_n & \text{et} & v_0 = -2. \\ w_{n+1} = u_n + 2v_n + 2w_n & \text{et} & w_0 = 1. \end{cases}$$

- a) A l'aide du résultat précédent, expliciter u_n , v_n , w_n .
 b) Etudier la convergence et calculer les sommes éventuelles U, V, W des trois séries suivantes:

$$\sum_{n \geq 0} a^{3n} u_n \quad ; \quad \sum_{n \geq 0} a^{3n} v_n \quad ; \quad \sum_{n \geq 0} a^{3n} w_n.$$

3°) On définit une suite de fonctions de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} par $g_0 = K$, puis:

$$g_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)g_n(t)dt$$

et l'on pose alors:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x).$$

- a) Prouver par récurrence que g_n est bien définie et qu'il existe trois nombres réels α_n , β_n , γ_n tels que l'on ait pour tout réel positif x :

$$g_n(x) = a^{3n} (\alpha_n a^2 + 2\beta_n ax + \gamma_n x^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

A l'aide des résultats précédents, on explicitera les expressions de α_n , β_n , γ_n .

- b) Vérifier que, pour tout entier naturel n et tout réel positif x , on a:

$$f_{n+1}(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t)f_n(t)dt.$$

4°) On suppose que $4a^3 < 1$ et l'on définit pour tout réel positif x :

$$L(x) = (Ua^2 + 2Vax + Wx^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

- a) Montrer que, pour tout réel positif x , la suite $(f_n(x))$ converge et exprimer sa limite en fonction de $L(x)$.
 b) Montrer que la fonction L est solution de (1).

5°) Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle est nécessairement de la forme:

$$f(x) = (Aa^2 + 2Bax + Cx^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

6°) On considère réciproquement la fonction f définie par:

$$f(x) = (Aa^2 + 2Bax + Cx^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

- a) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si A , B , C vérifient:

$$(I_3 - a^3 M) \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec:} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- b) Pour quelles valeurs de a ce système admet-il une solution unique et quelle est alors cette solution?

7°) Etudier, selon les valeurs prises par a , l'existence des solutions de (1) et en déduire leur expression.

FIN
