ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

MATHEMATIQUES II

Options économique et technologique

Mercredi 8 mai 1991 de 14h à 18h

Dans tout le problème, on désigne par j un entier supérieur ou égal à 1.

PARTIE I

On établit dans cette partie quelques résultats préliminaires d'Algèbre linéaire.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique, et l'on considère la matrice:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

1°) Etude des éléments propres de M.

a) Quelles sont les trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de M? (avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$).

b) La matrice M est-elle diagonalisable?

c) Déterminer des vecteurs propres v_1, v_2, v_3 associés à chacune de ces trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (on prendra leur dernière composante égale à 1).

d) Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3), puis déterminer l'inverse de cette matrice P.

2°) Calcul des puissances de M.

a) Déduire des résultats précédents une matrice diagonale D telle que: $M = PDP^{-1}$.

b) En déduire l'expression de M^{j-1} (on rappelle que l'entier naturel j est non nul).

A SUIVRE

PARTIE II

On considère dans cette partie un marché sur lequel 3 fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendante, auprès de ces 3 fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable. On désigne:

- par X_j la variable aléatoire indiquant le nombre des fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des j premiers consommateurs.
- par $P(X_j = k)$ la probabilité de l'événement $[X_j = k]$, où $k = 1, 2$ ou 3.
- par U_j la matrice-colonne suivante:

$$U_j = \begin{bmatrix} P(X_j = 1) \\ P(X_j = 2) \\ P(X_j = 3) \end{bmatrix}.$$

- par $E(X_j)$ et $V(X_j)$ l'espérance et la variance de X_j.

1°) Etude de la loi des variables aléatoires X_j.

a) Déterminer les trois probabilités conditionnelles suivantes: $P(X_{j+1} = 1 / X_j = 1)$, $P(X_{j+1} = 1 / X_j = 2)$, $P(X_{j+1} = 1 / X_j = 3)$, puis, à l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'expression de $P(X_{j+1} = 1)$ en fonction des probabilités $P(X_j = 1)$, $P(X_j = 2)$, $P(X_j = 3)$.
Exprimer de même $P(X_{j+1} = 2)$ et $P(X_{j+1} = 3)$ en fonction de $P(X_j = 1)$, $P(X_j = 2)$, $P(X_j = 3)$.

b) Etablir que $U_{j+1} = MU_j$.

c) Préciser U_1, puis calculer U_j en fonction de j.

d) Déterminer la limite des éléments de la matrice U_j lorsque j tend vers $+\infty$.

2°) Calcul de l'espérance de X_j.

a) On considère les matrices-lignes L et J définies par: $L = [1, 2, 3]$ et $J = [1, 1, 1]$.
Déterminer deux réels α et β tels que $LM = \alpha L + \beta J$. Calculer JU_j, puis LU_j en fonction de $E(X_j)$.
Etablir alors que:

$$E(X_{j+1}) = \alpha E(X_j) + \beta.$$

b) Préciser $E(X_1)$, puis calculer $E(X_j)$ en fonction de j.
Vérifier que $E(X_j)$ tend vers 3 lorsque j tend vers $+\infty$.

c) A quel entier j_0 (resp. j_1) le nombre j des clients ayant passé commande doit-il être supérieur afin d'avoir: $2{,}9 \leq E(X_j) \leq 3$ (resp. $2{,}99 \leq E(X_j) \leq 3$)?

On désigne désormais par T la variable aléatoire indiquant le nombre de consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des 3 fournisseurs a reçu au moins une commande.

3°) Etude de la loi de la variable aléatoire T.

a) Comparer les deux événements $[T \leq j]$ et $[X_j = 3]$.
En déduire $P(T = j)$ en fonction de $P(X_j = 3)$ et $P(X_{j-1} = 3)$ pour $j \geq 2$.
(Et l'on a bien entendu $P(T = 1) = P(X_1 = 3)$, ces deux expressions étant évidemment nulles).

b) A l'aide de l'expression de $P(X_j = 3)$ obtenue en II.1°, établir que, pour $j \geq 2$:

$$P(T = j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$$

Tournez la page S.V.P.

c) Calculer $P(T \leq j) = P(T = 1) + P(T = 2) + ... + P(T = j)$. En déduire que:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P(T = j) = 1.$$

4°) Calcul de l'espérance de T.

a) Etablir la formule suivante pour tout réel x appartenant à [0, 1[:

$$\sum_{j=2}^{n+1} x^j = x^2 \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

En dérivant cette égalité puis en faisant tendre n vers $+\infty$, calculer la somme:

$$S(x) = \sum_{j=2}^{+\infty} j x^{j-1}.$$

b) En déduire la valeur de E(T).

PARTIE III

Dans cette partie, on pose pour tout entier $j \geq 1$:

$$F(j) = 1 + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^j - 3.\left(\frac{2}{3}\right)^j.$$

1°) Etude d'un algorithme.

a) Etudier le sens de variation de la suite (F(j)).
Préciser F(1) et la limite de F(j) lorsque j tend vers l'infini.

b) Prouver que, pour tout réel y appartenant à]0, 1[, existe un unique entier naturel $j \geq 2$ tel que: $F(j-1) < y \leq F(j)$.

c) On considère l'algorithme suivant (dans lequel y est une variable de type réel contenant une valeur appartenant à]0, 1[, z une variable de type réel, et n, p, q des variables de type entier):

```
begin
n := 1 ; p := 2 ; q := 3 ; z := (1-y)/3 ;
while (p-1)/q > z do
  begin n := n+1 ; p := 2 * p ; q := 3 * q ; end;
write(n);
end;
```

- Exprimer en fonction de k les valeurs contenues par n, p, q à l'issue du $k^{\text{ème}}$ passage dans la boucle **while ... do**, dans la mesure où celui-ci a lieu.
(pour k = 0, il n'y a aucun passage dans la boucle et les valeurs contenues dans n, p, q sont 1, 2, 3).
On convient de noter j la valeur finale contenue dans la variable n.
- Exprimer en fonction de j l'avant-dernière et la dernière valeur prises par (p-1)/q au cours de l'algorithme. Quelles inégalités vérifient-elles? En déduire que $F(j-1) < y \leq F(j)$.

d) Déterminer enfin un équivalent de l'entier j tel que $F(j-1) < y \leq F(j)$ lorsque le réel y tend vers 1.

2°) Application à l'étude de la fonction de répartition de T.

a) Comparer $P(T \leq j)$ et F(j).

b) A quel entier j_0 (resp. j_1) le nombre j des clients ayant passé commande doit-il être supérieur afin d'avoir: $P(T \leq j) \geq 0,5$ (resp. $P(T \leq j) \geq 0,99$)?

******

FIN