ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

MATHEMATIQUES II

Option générale

Mercredi 8 mai 1991 de 14h à 18h

Dans tout le problème, on désigne par n un entier donné, supérieur ou égal à 2, et par j un entier supérieur ou égal à 1.

PARTIE I

Dans cette partie, on désigne par $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n-1, et l'on considère l'application F associant à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ la fonction polynôme Q définie pour tout réel t par:

$$Q(t) = P(t) + \frac{1-t}{n} P'(t).$$

1°) Etude de l'application F.

a) Montrer que F est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) On considère pour $1 \leq k \leq n$ la fonction polynôme P_k définie par $P_k(t) = t^{n-k}$.
Expliciter la fonction polynôme $Q_k = F(P_k)$.

c) Déterminer la matrice M de F dans la base $B = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2°) Etude des éléments propres de F.

a) Donner les valeurs propres de F. L'endomorphisme F est-il diagonalisable?

b) Déterminer le sous-espace propre de F associé à la valeur propre 1.

c) Soient k un entier tel que $1 \leq k < n$ et P un élément non nul de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que:

$$F(P) = \frac{n-k}{n} P.$$

Montrer que $P(1) = 0$.
On convient alors de poser $P(t) = (t-1)^r R(t)$, avec $1 \leq r < n$ et $R(1) \neq 0$.
Quelle relation vérifient alors r et R? En déduire que $r = k$ et préciser le degré de R.

d) Déterminer les sous-espaces propres de F associés aux différentes valeurs propres de F.

3°) Etude d'une suite $U_{j+1} = F(U_j)$.

On considère la suite de fonctions polynômes définie par $U_1(t) = t^{n-1}$, puis $U_{j+1} = F(U_j)$.

a) Etablir l'égalité suivante pour tout réel t:

$$U_1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (t-1)^k.$$

b) En déduire $U_2(t)$, $U_3(t)$, puis, par récurrence, $U_j(t)$ comme combinaisons linéaires de $1, t-1, \ldots, (t-1)^{n-1}$. Expliciter alors $U_j(0)$ sous forme d'une somme.

PARTIE II

Dans toute la suite du problème, on considère un marché sur lequel n fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendante, auprès de ces n fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable.

On désigne:

- par X_j la variable aléatoire indiquant le nombre des fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des j premiers consommateurs.
- par $P(X_j = k)$ la probabilité de l'événement $[X_j = k]$, où $k = 1, 2, \ldots, n$.
- par $E(X_j)$ et $V(X_j)$ l'espérance et la variance de X_j.

1°) Etude de la loi des variables aléatoires X_j.

a) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Donner les probabilités conditionnelles $P(X_{j+1} = k / X_j = k)$ et $P(X_{j+1} = k / X_j = k-1)$ (lorsque $k \geq 2$).

Que vaut $P(X_{j+1} = k / X_j = i)$ lorsque $1 \leq i \leq n$, l'entier i étant distinct de k-1 et k?

b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'expression de $P(X_{j+1} = k)$ en fonction des probabilités $P(X_j = i)$ où $1 \leq i \leq n$.

On convient, dans la suite de cette partie, de poser pour tout entier $j \geq 1$:

$$G_j(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X_j = k)\, t^{n-k}.$$

2°) Etude de la suite (G_j).

a) Préciser G_1, puis déduire de la question précédente que $G_{j+1} = F(G_j)$.

Vérifier alors que cette suite (G_j) n'est autre que la suite (U_j) définie en I.3°.

b) En déduire l'expression de $P(X_j = n)$. A l'aide d'un raisonnement probabiliste,établir que, si $1 \leq j < n$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} = 0.$$

c) Prouver que $P(X_j = n)$ tend vers 1 lorsque j tend vers l'infini, et en déduire quelles sont les limites de $E(X_j)$ et $V(X_j)$ lorsque j tend vers l'infini.

3°) Calcul de l'espérance de X_j.

a) Calculer $G_j(1)$, puis exprimer $G_j'(1)$ en fonction de $E(X_j)$ et de n.

b) A l'aide de la relation $G_{j+1} = F(G_j)$, exprimer $(G_{j+1})'(1)$ en fonction de $(G_j)'(1)$. Que vaut $(G_1)'(1)$?

c) En déduire $(G_j)'(1)$, puis $E(X_j)$, en fonction de j et de n.

Retrouver ainsi la limite de $E(X_j)$ lorsque l'entier j tend vers l'infini.

PARTIE III

On désigne par T la variable aléatoire indiquant le nombre de consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des n fournisseurs a reçu au moins une commande.

1°) Etude de la loi de la variable aléatoire T.

a) Comparer les deux événements $[T \leq j]$ et $[X_j = n]$.
En déduire $P(T = j+1)$ en fonction de $P(X_{j+1} = n)$ et $P(X_j = n)$.
(Et l'on a bien entendu $P(T = 1) = P(X_1 = n)$, ces deux expressions étant évidemment nulles).

b) Evaluer $P(T=1) + P(T=2) + \ldots + P(T=j)$ en fonction de $P(X_j = n)$. En déduire que:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P(T = j) = 1.$$

c) Déduire enfin de l'expression de $P(X_j = n)$ obtenue en II.2° que:

$$P(T = j+1) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} C_{n-1}^{k} \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

2°) Etude de l'espérance de T.

a) Donner l'expression, pour $1 \leq k < n$, de la somme suivante:

$$S_k = \sum_{j=1}^{+\infty} j\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

b) En déduire que:

$$E(T-1) = n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{C_{n-1}^{k}}{k}.$$

c) Etablir pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1] la formule suivante:

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} (x-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1}.$$

d) En déduire, par intégration de l'égalité précédente sur [0, 1], que:

$$E(T) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots \ + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

3°) Evaluation asymptotique de E(T).

a) Ecrire en PASCAL un algorithme permettant d'obtenir E(T) en fonction de n.

b) A l'aide de cet algorithme, donner dans les deux cas n = 10 et n = 100 une valeur approchée du nombre moyen des consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des n fournisseurs a reçu au moins une commande.

c) Etablir pour tout entier $k \geq 1$ l'inégalité suivante:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Quel équivalent de E(T) en déduit-on lorsque l'entier n tend vers l'infini?

******