ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles
EDHEC, ESC Bordeaux, ESC Marseille, ESC Reims, ESC Rouen, ICN

CONCOURS D'ADMISSION 1992

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
OPTION GENERALE

Aucun document n'est autorisé.
L'énoncé comporte 8 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

EXERCICE 1

Notations :

- a est un nombre réel fixé ;
- $\mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
- on note ϕ l'application qui, à tout élément $f \in \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$, fait correspondre la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \qquad g(x) = \dfrac{1}{x-a} \displaystyle\int_x^{2x-a} f(t)\,dt \\ g(a) = f(a) \end{cases}$$

1°) a) Vérifier que ϕ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$.

b) Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ et calculer $g'(x)$ pour $x \neq a$.

c) On prend $f : t \to |t-a|$; l'application g correspondante est-elle dérivable en a ?

d) ϕ est-il un endomorphisme surjectif ?

2°) a) Soit $u \in \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(x) = 2\,u(2x-a)$

(i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u\left(\dfrac{(2^n-1)\,a + x}{2^n}\right) = 2^n\,u(x)$

(ii) En déduire que u est l'application nulle.

b) Déterminer le noyau de ϕ.

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout k entier compris entre 0 et n, on définit d_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad d_k(x) = (x-a)^k \qquad \{d_0(x) = 1\}$$

a) Déterminer $\phi(d_k)$.

b) On note ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que ϕ_n est un automorphisme diagonalisable.

4°) Soit $n \in \mathbb{N}$;

a) c_n désigne l'application $x \to x^n$. Ecrire c_n comme combinaison linéaire de $d_0, d_1, \dots d_n$.

b) Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_x^{2x-a} f(t)\,dt = (x-a)\,x^n$$

EXERCICE 2

a désigne un réel strictement compris entre 0 et 1.

Un signal lumineux se déplace entre trois points A, B et C.

S'il est en A, la probabilité qu'il se déplace en B est égale à a et celle qu'il se déplace en C est $1 - a$.

S'il est en B, la probabilité qu'il aille en A est a, et celle qu'il aille en C est $1 - a$.

Enfin, s'il est en C, la probabilité qu'il aille en A est a et celle qu'il aille en B est $1 - a$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) après le n-ième déplacement".

Si $n = 0$, on note A_0 (respectivement B_0 et C_0) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) avant le premier déplacement".

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{bmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{bmatrix}$

1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{bmatrix}$

On pose $N = {}^tM$

2°) a) Vérifier que le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre de N.
A quelle valeur propre est-il associé ?

b) Déterminer les autres valeurs propres de N, et, suivant les valeurs de a, les sous-espaces propres associés.

c) N est-elle diagonalisable ?

3°) Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{bmatrix}$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}
(on fera apparaître les calculs).

Dans la suite de l'exercice, on fixe $a = \dfrac{1}{4}$

4°) a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N^n = PD^nP^{-1}$, où D est une matrice diagonale à préciser.

b) Calculer alors N^n pour tout entier naturel n.

c) En déduire la valeur de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5°) On suppose qu'avant le premier déplacement, le signal est en A.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n.

b) Déterminer alors les limites de ces suites lorsque n tend vers l'infini.

PROBLEME

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à deux, et β un réel strictement positif.
Dans un rayon de magasin, il y a n articles $a_1, a_2, \ldots, a_n$, valant respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ francs.

Un client se présente et achète un nombre aléatoire A d'articles distincts de ce rayon ($0 \leq A \leq n$).
On suppose que, lorsqu'un client s'est décidé pour l'achat de A articles, les différents choix possibles de ces A articles sont équiprobables.

- On note S la somme payée par le client pour l'achat de ces A articles et, pour $1 \leq i \leq n$, X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le client achète l'article a_i, et 0 si non.
- L'objet du problème est principalement d'évaluer l'espérance et la variance de S, suivant deux hypothèses différentes sur A.
- Les deux parties du problème sont largement indépendantes ; seuls les résultats des questions 1°) et 6°) a) de la première partie sont utilisés dans la deuxième partie.

Première partie

1°) a) Pour $0 \leq k \leq n$, calculer la probabilité conditionnelle $P\big((X_i = 1) / (A = k)\big)$.

b) i et j désignant deux entiers distincts compris entre 1 et n,

calculer $P\Big(\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big) / (A = k)\Big)$.

c) Comment s'exprime S en fonction des X_i et des α_i ?

- On fait, dans cette première partie, l'hypothèse suivante :

(H') A suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$

2°) Calculer $P(X_i = 1)$ à l'aide de la formule des probabilités totales .

3°) Calculer l'espérance $E(S)$ en fonction des α_i .

4°) i et j désignent deux entiers distincts compris entre 1 et n ;

a) Calculer $P\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big)$.

b) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_i, X_j) .

X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

5°) a) Exprimer la variance $V(S)$ en fonction de $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2$ et $\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^2\right)$.

b) On suppose, dans cette question b), que : $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \alpha_i = i$.

Vérifier que : $V(S) = \dfrac{n(n+1)}{144}(3n^2 + 11n + 4)$.

6°) On suppose maintenant, plus généralement, que :

$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \alpha_i = i^\beta$.

a) Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^\beta$

En déduire un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} i^\beta$, puis de $E(S)$.

b) Donner un équivalent, de la forme $\gamma\, n^\delta$, de la variance $V(S)$, quand $n \to +\infty$;
(γ et δ sont des constantes réelles que l'on déterminera).

Deuxième partie

• a désigne un nombre réel appartenant à $]0,1[$.
On fait, pour cette 2ème partie, l'hypothèse suivante :

(H'') **La loi de A est définie ainsi :**

$$\begin{cases} P(A=0) = a \\ \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad P(A=k) = \dfrac{\lambda}{k} \end{cases}$$

1°) Déterminer λ .

2°) Etude du cas particulier : $n = 3$, $a = \frac{1}{12}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$.

Déterminer les lois de A et de S, et calculer $E(S)$ et $V(S)$.

<u>• On reprend maintenant l'étude du cas général.</u>

3°) Calculer $P(X_i = 1)$.

4°) i et j désignent encore deux entiers distincts compris entre 1 et n ;

a) Calculer $P\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big)$.

b) Quelle relation doit-il exister entre a et n pour que les variables aléatoires X_i et X_j soient indépendantes ?

c) Calculer la covariance du couple (X_i , X_j) .

5°) Exprimer E(S) et V(S) en fonction de λ , $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^2\right)$.

6°) On suppose, dans cette question, que : $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\alpha_i = i^{\beta}$.

a) Ecrire un algorithme qui, à partir de n, a, β, calcule $E(S)$ et $V(S)$.

Donner les résultats numériques pour :

(i) $n = 10$; $a = 0{,}1$; $\beta = 1{,}5$

(ii) $n = 20$; $a = 0{,}5$; $\beta = 1{,}2$.

b) On pose : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$

(i) Déterminer un équivalent de v_n quand $n \to +\infty$; quelle est la nature de la série de terme général v_n ? Rappel : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$

(ii) Déduire du (i) que la suite (u_n) est convergente ;

montrer alors que : $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$ quand $n \to +\infty$.

c) Donner un équivalent de $E(S)$ quand $n \to +\infty$.

d) Donner un équivalent de $V(S)$ quand $n \to +\infty$.

7°) Comparaison des hypothèses **(H')** et **(H")**.

a) Quelle est l'hypothèse la plus vraisemblable ?

b) Quelle est l'hypothèse la plus avantageuse en moyenne pour le vendeur ?

(on discutera suivant les valeurs de n et a).