Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1992

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Lundi 4 mai 1992 de 8 heures à 12 heures

PROBLÈME 1

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante sauf la question II-3 qui utilise les résultats de I.

Partie préliminaire

On considère les deux matrices à cœfficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour a et b réels, on pose $M_{a,b} = a\,A + b\,B$.
Enfin, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $M_{a,b}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{E} = \{ M_{a,b} \,/\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   Quelle est sa dimension ?

2. Exprimer en fonction de A et B les matrices suivantes :
   A^2, AB, BA, B^2.

3. Est-ce que le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$?
   Est-ce que ce produit est commutatif ?

Partie I . Éléments propres des matrices de $\mathcal{E}$.

1. Montrer que $B^3 + B^2 - 2B = 0$.

2. a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B .

   b. Montrer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ? Est-ce que B et A sont diagonalisables ?

3. Soit $M_{a,b}$ une matrice de $\mathscr{E}$.

   a. Montrer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de $M_{a,b}$.

   b. Préciser, en fonction de a et b, les valeurs propres de $M_{a,b}$. Est-ce que $M_{a,b}$ est diagonalisable ?

Partie II . Exponentielle d'une matrice de $\mathscr{E}$.

Soit $M_{a,b}$ une matrice de $\mathscr{E}$ telle que $(a, b) \neq (0, 0)$.
On considère les deux matrices suivantes :

$$M_1 = A + B, \quad M_2 = A - 2B .$$

1. a. Calculer en fonction de M_1 et M_2 les matrices suivantes :

$$(M_1)^2, \quad M_1 M_2, \quad M_2 M_1, \quad (M_2)^2.$$

   b. Montrer que (M_1, M_2) est une base du IR-espace vectoriel $\mathscr{E}$.

   c. On pose $M_{a,b} = x\, M_1 + y\, M_2$.
   Exprimer x et y en fonction de a et b.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

   a. Calculer $(M_1)^n$ et $(M_2)^n$.

   b. En déduire l'expression de $(M_{a,b})^n$ en fonction de n, a, b, M_1 et M_2 .

   c. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}(M_{a,b})^k$ avec la convention suivante :

$$(M_{a,b})^0 = I \text{ matrice unité d'ordre 3.}$$

   - Montrer qu'il existe deux réels λ_n et μ_n tels que

$$S_n = I + \lambda_n M_1 + \mu_n M_2 .$$

   - Montrer que les suites (λ_n) et (μ_n) convergent vers des réels λ et μ que l'on déterminera. On rappelle que, pour tout réel x ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!} = e^x .$$

3. On pose alors

$$e^{M_{a,b}} = I + \lambda\, M_1 + \mu\, M_2 .$$

Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de $e^{M_{a,b}}$.
Est-ce que $e^{M_{a,b}}$ est diagonalisable ?

PROBLÈME 2

Pour tout réel x, on note E(x) la partie entière de x, c'est-à-dire l'entier relatif E(x) tel que :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 .$$

Pour tout $\alpha \in IR_+$, on note $f_\alpha : IR^*_+ \longrightarrow IR$ l'application définie par :

$$\forall x \in IR^*_+ , \quad f_\alpha(x) = x^\alpha\, E\left(\frac{1}{x}\right) .$$

PREMIÈRE PARTIE

1. Étudier la continuité de f_0 sur $\left[\frac{1}{4}\,;\,2\right]$, et tracer la courbe représentative de f_0 sur cet intervalle (repère orthonormé, unité 5 cm).

2. Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ fixé, la limite de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. Pour quelles valeurs de α f_α peut-elle être prolongée par continuité à droite en 0 ?

3. Tracer les représentations graphiques de f_2, f_1, $f_{\frac{1}{2}}$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;\,2\right]$ (sur trois figures distinctes, repère orthonormé, unité 5 cm).

DEUXIÈME PARTIE

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$I_\alpha(n) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f_\alpha(x)\,dx \quad \text{et} \quad J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^{n} I_\alpha(p)\,.$$

1. Calculer $I_\alpha(n)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\left(\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p^{\alpha+1}}\right) - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right).$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

   a. Exprimer $J_\alpha(n)$ sous forme d'une seule intégrale.

   b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad J_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$.

   c. Conclure quant à la convergence de la suite $\left(J_\alpha(n)\right)_{n \geq 1}$.

4. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad J_0(n) = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p}$.

   b. Établir : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{p} \geq \int_p^{p+1} \frac{dx}{x}$.

   c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_0(n) \geq \int_2^{n+2} \frac{dx}{x}.$$

   d. Conclure quant à la convergence de la suite $\left(J_0(n)\right)_{n \geq 1}$.

TROISIÈME PARTIE

On note $M = 3 \lim_{n \to \infty} J_2(n)$, c'est-à-dire $M = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = \frac{1}{n^3} \ , \quad v_n = \frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)} \ , \quad w_n = v_n - u_n \ .$$

1. a. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\ , \quad v_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1} \ ,$$

et calculer a, b, c.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n\,(n+1)} \ .$$

c. Montrer que la série $\sum_{p \geq 2} v_p$ converge et calculer sa somme.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, calculer $\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p$.

2. a. Calculer w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

b. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: $w_n = \frac{v_n}{n^2}$.

c. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} w_p \leq \frac{1}{2n^4} \ .$$

3. a. Déterminer un entier naturel n tel que $\frac{1}{2n^4} \leq \frac{10^{-7}}{2}$.

b. En déduire une valeur approchée de M à 10^{-7} près.