CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1992

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Lundi 11 mai 1992, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

-. Règles graduées.
-. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

OBJECTIF DU PROBLÈME

On note E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions à valeurs réelles, continues sur un intervalle $[a,\ b]$ où $a < b$. On rappelle qu'une fonction affine sur un intervalle J est une fonction f définie sur J par une relation de la forme : $f(t) = \alpha t + \beta$, où α et β sont des nombres réels.

Étant donné un nombre entier $n \geq 2$ et une subdivision de $[a,\ b]$, c'est-à-dire une suite strictement croissante $\sigma_n = (x_0,\ x_1, ...,\ x_n)$ de $n+1$ éléments de $[a,\ b]$, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, on note $E(\sigma_n)$ l'ensemble des fonctions f définies sur $[a,\ b]$ telles que chacune des restrictions de f aux intervalles $[x_k,\ x_{k+1}]$, où k prend les valeurs $0, 1, ..., n-1$, soit une fonction affine.

L'objet du problème est d'étudier l'approximation d'une fonction de classe C^2 sur $[a,\ b]$ par des éléments de $E(\sigma_n)$.

PARTIE I : *étude de* $E(\sigma_2)$

Dans cette partie, on prend $n = 2$. Ainsi $x_0 = a$ et $x_2 = b$. On pose $c = x_1$.

1. Montrer que $E(\sigma_2)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit f un élément de $E(\sigma_2)$. Calculer $f(t)$ en fonction de $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ pour $a \leq t \leq c$, puis pour $c \leq t \leq b$.

3. Soit Φ l'application de $E(\sigma_2)$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $\Phi(f) = (f(a),\ f(c),\ f(b))$
Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de $E(\sigma_2)$.

4. On définit trois éléments f_0, f_1 et f_2 de $E(\sigma_2)$ par les conditions :

$$\Phi(f_0) = (1,\ 0,\ 0)\ ; \quad \Phi(f_1) = (0,\ 1,\ 0)\ ; \quad \Phi(f_2) = (0,\ 0,\ 1)$$

a) Représenter graphiquement les fonctions f_0, f_1 et f_2.

b) Montrer que $(f_0,\ f_1,\ f_2)$ est une base de $E(\sigma_2)$.

5. On considère les fonctions g_0, g_1 et g_2 définies sur $[a,\ b]$ par les relations :

$$g_0(t) = |t-a| \qquad g_1(t) = |t-c| \qquad g_2(t) = |t-b|$$

a) Montrer que $(g_0,\ g_1,\ g_2)$ est une base de $E(\sigma_2)$. Calculer les coordonnées de chacune des fonctions g_0, g_1 et g_2 sur la base $(f_0,\ f_1,\ f_2)$.

b) Soient α, β et γ des nombres réels non nuls. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

c) En déduire les coordonnées de chacune des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur la base $(g_0,\ g_1,\ g_2)$.

PARTIE II : *étude de* $E(\sigma_n)$

Dans cette partie, on prend $a = 0$, $b = 1$ et $x_k = \dfrac{k}{n}$ pour tout nombre entier naturel $k \leq n$. L'espace vectoriel $E(\sigma_n)$ sera noté plus simplement E_n

1. Prouver que E_n est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[0,\ 1]$.

2. Soit Φ l'application de E_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par : $\Phi(f) = (f(x_0),\ f(x_1), \ldots,\ f(x_n))$
Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de E_n.

3. On définit une famille $(f_0,\ f_1, \ldots,\ f_n)$ de $n+1$ éléments de E_n par les conditions :

$$\Phi(f_k) = (0, \ldots,\ 0,\ 1,\ 0, \ldots,\ 0)$$

le nombre 1 étant à la $(k+1)^{\text{ième}}$ place. Autrement dit, $f_k(x_k) = 1$ et $f_k(x_j) = 0$ pour $j \neq k$.

a) Montrer que $(f_0,\ f_1, \ldots,\ f_n)$ est une base de E_n.

b) Montrer que, pour tout élément g de E_n, on a l'égalité :

$$g = \sum_{k=0}^{n} g(x_k)\ f_k$$

4. Pour tout nombre entier naturel $k \leq n$, on considère la fonction g_k définie sur $[0,\ 1]$ par la relation :

$$g_k(t) = |t - x_k|$$

a) Montrer que les fonctions g_k appartiennent à E_n.

b) Soit $(\lambda_0,\ \lambda_1, \dots,\ \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$. On pose :

$$g = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\ g_k$$

Soit j un nombre entier compris entre 1 et $n-1$. Si on suppose que $\lambda_j \neq 0$, montrer que la fonction g n'est pas dérivable en x_j.

5. a) En déduire que la famille $(g_0,\ g_1, \dots,\ g_n)$ est libre. Est-ce une base de E_n ?

b) En déduire aussi que $f_0,\ f_1, \dots,\ f_n$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f_0 &= \lambda_0 g_0 + \mu_0 g_1 + \nu_0 g_n \\ f_k &= \lambda_k g_{k-1} + \mu_k g_k + \nu_k g_{k+1} && \text{si } 1 \leq k \leq n-1 \\ f_n &= \lambda_n g_0 + \mu_n g_{n-1} + \nu_n g_n \end{aligned}$$

(Pour les entiers k compris entre 1 et $n-1$, on commencera par montrer que f_k est de la forme :

$$f_k = \alpha_k g_0 + \lambda_k g_{k-1} + \mu_k g_k + \nu_k g_{k+1} + \beta_k g_n$$

puis que $\alpha_k = \beta_k = 0$ en considérant les restrictions de f_k aux deux intervalles $[x_0,\ x_1]$ et $[x_{n-1},\ x_n]$.)

c) Calculer, à l'aide des résultats de la partie I, les nombres $\lambda_k,\ \mu_k$ et ν_k.

6. *Application.* On considère la matrice carrée A_n d'ordre $n+1$ dont l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne est $|i-j|$. Ainsi :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & n-2 & n-1 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ n-1 & n-2 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les coordonnées de g_k sur la base $(f_0,\ f_1, \dots,\ f_n)$. Interpréter la matrice :

$$P_n = \frac{1}{n} A_n$$

b) Prouver que la matrice A_n est inversible et calculer son inverse.

PARTIE III

Dans cette partie, on approche une fonction de classe C^2 sur $[0,\ 1]$ par des éléments de E_n.

1. On considère une fonction f de classe C^2 sur un intervalle $[a,\ b]$ (où $a < b$) telle que $f(a) = f(b)$. Soit c un élément de $]a,\ b[$ et $\sigma_2 = (a,\ c,\ b)$.

a) Soit φ un élément de $E(\sigma_2)$ tel que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Établir l'égalité :

$$\int_a^b \varphi(t)\ f''(t)\ dt = [f(c) - f(a)][\varphi'(b) - \varphi'(a)]$$

b) Déterminer un élément φ_c de $E(\sigma_2)$ tel que, quelle que soit f :

$$\int_a^b \varphi_c(t)\ f''(t)\ dt = f(c) - f(a)$$

FIN !!