CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ÉCOLE EUROPÉENNE DES AFFAIRES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION DE 1992

Mathématiques II

OPTION GÉNÉRALE

Samedi 9 mai 1992, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

-. Règles graduées.
-. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Dans tout le problème, on désigne par n, a et b des nombres entiers naturels non nuls.

PARTIE I

On effectue dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires une suite de tirages de la façon suivante : si les $n-1$ premiers tirages ont tous donné une boule blanche (cette condition n'étant bien sûr pas à prendre en compte au premier tirage), on procède au $n^{\text{ième}}$ tirage.

– Si la boule obtenue est noire, ce $n^{\text{ième}}$ tirage est le tirage final ;

– si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec, en plus, a autres boules blanches (et l'urne est alors prête pour le $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage).

1. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = b$ et l'on désigne par X la variable aléatoire associant à toute suite de tirages :

– la valeur 0 si, à chaque tirage, une boule blanche a été obtenue ;
– le numéro du tirage final où apparaît une boule noire, sinon.

a) Déterminer la probabilité p_n d'obtenir une boule noire au $n^{\text{ième}}$ tirage, autrement dit, la probabilité p_n pour que $X = n$.

b) Déterminer des nombres réels α et β tels que, pour tout nombre entier naturel non nul n, on ait :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1}$$

c) Calculer la somme $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ et en déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$$

d) Étudier l'existence de l'espérance de X.

2. On revient au cas général. On note $P(A_n)$ la probabilité de l'événement :
$A_n =$ “ une boule blanche apparaît à chacun des n premiers tirages ”

Montrer que :

$$P(A_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka+b}{ka+2\,b} = \frac{b}{2\,b} \cdot \frac{a+b}{a+2\,b} \cdots \frac{(n-1)\,a+b}{(n-1)\,a+2\,b}$$

3. Dans cette question, on étudie la convergence de la suite $(P(A_n))_{n\geq 1}$.

a) Soient $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ des nombres réels positifs. Démontrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

En déduire une minoration de $\dfrac{1}{P(A_n)}$. En conclure que la limite de $P(A_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ est nulle.

b) On désigne par X_a la variable aléatoire associant à toute suite de tirages :
- la valeur 0 si, à chaque tirage, une boule blanche a été obtenue ;
- le numéro du tirage final où apparaît une boule noire, sinon.

Exprimer en fonction de $P(A_n)$ la probabilité pour qu'une boule noire soit obtenue à l'un des n premiers tirages. En déduire que, si $P(X_a = k)$ désigne la probabilité pour que $X_a = k$, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_a = k) = 1$$

4. Dans cette question, on désigne par Y une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $p_n = P(Y = n)$.

a) Exprimer en fonction des termes de la suite (p_n) le nombre réel :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} P(Y > k)$$

b) On suppose que Y admet une espérance $E(Y)$. Préciser le sens de variation de la suite (E_n), prouver que $E_n \leq E(Y)$. En déduire que la suite (E_n) converge.

c) On suppose que la suite (E_n) converge. Prouver que :

$$p_1 + 2\,p_2 + \cdots + np_n \leq E_n$$

En déduire que Y admet une espérance.

d) Sous l'une de ces hypothèses équivalentes, établir que :

(1) $$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n)$$

À l'aide de la relation (1), on se propose d'étudier dans la fin de cette partie l'espérance de la variable aléatoire X_a définie dans la question 3. Pour tout nombre entier naturel n, on note $r_n(a)$ la probabilité pour que $X_a > n$.

5. On suppose dans cette question que $a \geq b$.

a) Soient a_1 et a_2 des nombres entiers naturels non nuls tels que $a_1 \leq a_2$. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$r_n(a_1) \leq r_n(a_2)$$

En déduire la nature de la série de terme général $r_n(a)$ pour $a \geq b$.

b) Étudier l'existence de l'espérance de X_a pour $a \geq b$.

6. On suppose dans cette question que $1 \leq a < b$.

a) Exprimer $r_{n+1}(a)$ en fonction de $r_n(a)$. Établir que la suite $(nr_n(a))$ est décroissante à partir d'un certain rang ; en déduire qu'elle est convergente. On note ℓ sa limite.

b) Établir que si $\ell \neq 0$, alors $r_n(a) \geq \dfrac{\ell}{n}$ à partir d'un certain rang. En déduire que si $\ell \neq 0$, alors X_a n'admet pas d'espérance.

c) Montrer que, pour tout nombre entier naturel k :

$$a(k+1)\, r_{k+1}(a) - akr_k(a) = (a - 2\,b)\, r_{k+1}(a) + br_k(a) \tag{2}$$

d) En sommant les relations (2) pour k variant de 0 à n, puis en faisant tendre n vers $+\infty$, montrer que X_a admet une espérance. En déduire que $\ell = 0$, puis que :

$$E(X_a) = \frac{2\,b - a}{b - a}$$

PARTIE II

Dans cette partie, on considère une suite croissante (u_n) de nombres entiers naturels telle que $u_0 = b$. On généralise la situation étudiée dans la partie I.

On effectue dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires une suite de tirages de la façon suivante : si les $n-1$ premiers tirages ont tous donné une boule blanche (cette condition n'étant bien sûr pas à prendre en compte au premier tirage), on procède au $n^{\text{ième}}$ tirage.

- Si la boule obtenue est noire, ce $n^{\text{ième}}$ tirage est le tirage final ;
- si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec, en plus, $u_n - u_{n-1}$ autres boules blanches (et l'urne est alors prête pour le $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage).

Ainsi, l'urne contient b boules noires et u_n boules blanches au moment où l'on procède au $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage, dans la mesure où celui-ci a lieu.

1. Dans cette question, on étudie la probabilité d'obtention d'une boule noire.

a) Exprimer en fonction de b et des nombres u_k, où $1 \leq k < n$, la probabilité q_n de l'événement :
$A_n =$ " une boule blanche apparaît à chacun des n premiers tirages "

b) Étudier le sens de variation de la suite (q_n). En déduire que la suite (q_n) converge vers un nombre réel L appartenant à l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

On ne cherchera pas à expliciter ce nombre réel.

c) Soit p_n la probabilité d'obtenir une boule noire au $n^{\text{ième}}$ tirage. Exprimer la somme $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ en fonction de q_n. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 - L$$

d) Comparer les natures de la suite de terme général $\ln\left(\frac{1}{q_n}\right)$ et de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$. En déduire que la probabilité de ne pas obtenir de boule noire dans la suite des tirages est nulle si et seulement si cette dernière série diverge.

e) Décrire le mode de tirage et étudier l'éventualité de ne pas obtenir de boule noire dans la suite des tirages, dans les deux cas suivants :

- la suite (u_n) est une suite arithmétique, définie par $u_n = b + na$;
- la suite (u_n) est une suite géométrique, définie par $u_n = ba^n$ (avec $a \geq 2$).

2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) est définie par $u_n = ba^n$ (avec $a \geq 2$).

a) Préciser l'expression de q_n (que l'on notera $q_n(a)$ dans cette question).

On ne cherchera pas à expliciter la limite $L(a)$ de la suite $(q_n(a))$.

b) On étudie la vitesse de convergence de la suite $(q_n(a))_{n\geq 1}$.

Soient n et p des nombres entiers naturels non nuls. Établir que :

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{a^k} \leq \frac{1}{a^{n-1}(a-1)}$$

Établir, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,\ 1]$, l'inégalité :

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + 2\,x$$

Déduire de ces résultats l'inégalité suivante :

$$1 \leq \frac{q_n(a)}{q_{n+p}(a)} \leq \exp\left(\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}\right)$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, en conclure que :

(3)
$$0 \leq q_n(a) - L(a) \leq \frac{1}{(a-1)\,a^{n-1}}$$

c) On donne un nombre réel strictement positif ε. Écrire en langage PASCAL un algorithme calculant les valeurs de $q_n(a)$ tant que :

$$\frac{1}{(a-1)\,a^{n-1}} \cancel{\leq \varepsilon} > \varepsilon$$

À l'aide de cet algorithme, donner une valeur approchée de $L(2)$ à 10^{-4} près.

d) On étudie enfin la suite associant à tout nombre entier $a \geq 2$ le nombre réel $L(a)$.

Soient a_1 et a_2 des nombres entiers naturels non nuls tels que $a_1 \leq a_2$. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$q_n(a_1) \leq q_n(a_2)$$

En déduire que la suite $(L(a))_{a\geq 1}$ est croissante. En remplaçant n par 1 dans l'inégalité (3), déterminer la limite de $L(a)$ lorsque l'entier a tend vers $+\infty$.