# ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1992

**MATHEMATIQUES I**

**Option générale**

*Mercredi 13 mai 1992 de 14h à 18h*

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par $E_n$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications f de classe $C^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f et sa dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note alors pour tout élément f de $E_n$:

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| \qquad et \qquad M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(n)}(x)|.$$

L'objet du problème est d'établir que $E_n$ est inclus dans $E_k$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, puis d'obtenir une majoration de $M_k$ en fonction de $M_0$ et $M_n$.

## PARTIE I

On suppose dans cette partie que n = 2 et soit f un élément de $E_2$.

1°) <u>Une première majoration de $M_1$.</u>

a) Justifier l'inégalité suivante pour tout réel x et tout réel h:

$$(1) \qquad |f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{2}.$$

b) En déduire que, pour tout réel x et tout réel h strictement positif, on a:

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h}+\frac{M_2 h}{2}$$

puis en déduire que $E_2$ est inclus dans $E_1$.

c) Etablir que:

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

On pourra étudier les variations de la fonction u définie pour $t > 0$ par:

$$u(t) = \frac{2M_0}{t} + \frac{M_2 t}{2}.$$

2°) <u>Une seconde majoration de $M_1$.</u>

a) Soit t un nombre réel strictement positif. En appliquant l'inégalité (1) avec $h = t$, puis $h = -t$, établir que, pour tout nombre réel x:

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 t}{2} + \frac{M_0}{t}.$$

b) En procédant comme précédemment, en déduire une nouvelle majoration de $M_1$ en fonction de $M_0$ et de $M_2$.

# PARTIE II

On suppose dans cette partie que l'entier n est supérieur ou égal à 2, et l'on désigne par f un élément de $E_n$, par $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ $n-1$ nombres réels non nuls et deux à deux distincts, et l'on pose pour tout nombre réel x:

$$\begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix} = H_{n-1} \cdot \begin{bmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \quad avec \quad H_{n-1} = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{1!} & \frac{h_1^2}{2!} & \cdots & \frac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ \frac{h_2}{1!} & \frac{h_2^2}{2!} & \cdots & \frac{h_2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{n-1}}{1!} & \frac{h_{n-1}^2}{2!} & \cdots & \frac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix}.$$

1°) <u>Inversibilité de la matrice $H_{n-1}$.</u>

a) On considère le système d'équations suivant:

$$H_{n-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$. On pourra considérer la fonction-polynôme:

$$P(t) = \frac{x_{n-1}}{(n-1)!} t^{n-2} + \frac{x_{n-2}}{(n-2)!} t^{n-3} + \dots + \frac{x_2}{2!} t + x_1.$$

b) En déduire que la matrice $H_{n-1}$ est inversible.

2°) <u>Les inclusions de $E_n$ dans $E_k$ ($1 \leq k \leq n$).</u>

Soient un nombre réel x et un entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$

a) En majorant $|f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)|$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, établir que:

$$|F_k(x)| \leq 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n.$$

b) En déduire l'inclusion de $E_n$ dans $E_k$.

# PARTIE III

1°) Majoration de $M_1$ et $M_2$ en fonction de $M_0$ et de $M_3$.

On suppose dans cette question que $n = 3$ et soit f un élément de $E_3$.

En appliquant les résultats de la question I.2° aux fonctions f' et f, majorer $M_2$ en fonction de $M_1$ et de $M_3$, puis $M_1$ en fonction de $M_0$ et de $M_2$, et enfin $M_1$ et $M_2$ en fonction de $M_0$ et de $M_3$.

2°) Une seconde majoration de $M_1$ et $M_2$ en fonction de $M_0$ et de $M_3$..

On suppose dans cette question que $n = 3$ et soit f un élément de $E_3$.

a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f(x+h) et à f(x-h), montrer que, pour tout réel x et tout réel strictement positif h, on a:

$$|f'(x)| \leq \frac{M_3 h^2}{6} + \frac{M_0}{h} \qquad et \qquad |f''(x)| \leq \frac{M_3 h}{3} + \frac{4M_0}{h^2}.$$

b) En déduire de nouvelles majorations de $M_1$ et de $M_2$ en fonction de $M_0$ et de $M_3$.

3°) Majoration de $M_{n-1}$ en fonction de $M_0$ et de $M_n$.

On suppose dans cette question que $n \geq 2$ et soit f un élément de $E_n$.

a) En appliquant les résultats de la question I.2° à la fonction $f^{(n-2)}$, majorer $M_{n-1}$ en fonction de $M_{n-2}$ et de $M_n$.

b) En déduire par récurrence sur l'entier n ($n \geq 2$) l'existence d'une suite de nombres réels $(a_n)$ indépendants de f et tels que:

$$M_{n-1} \leq a_n M_0^{\frac{1}{n}} M_n^{1-\frac{1}{n}} \qquad avec \qquad a_n^n \leq 2^{n-1} a_{n-1}^{n-1}.$$

c) En déduire que:

$$M_{n-1} \leq 2^{\frac{n-1}{2}} M_0^{\frac{1}{n}} M_n^{\frac{n-1}{n}}.$$

4°) Majoration de $M_k$ en fonction de $M_0$ et de $M_n$ ($0 \leq k \leq n$).

On suppose dans cette question que $n \geq 2$ et soit f un élément de $E_n$.

Déduire par récurrence de la majoration obtenue précédemment pour $M_{n-1}$ que, pour tout entier k compris entre 0 et n, on a:

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{\frac{n-k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

# PARTIE IV

On se propose enfin d'établir que les majorations obtenues en I.2° et III.2° sont optimales. A cet effet, on considère pour tout entier $p \geq 1$ la fonction $w_p$ définie sur [0, 1] par:

$$w_p(x) = \begin{cases} 2 \quad si \quad 0 \leq x \leq 1 - \dfrac{1}{2p} \\ 2\sin(p\pi(1-x)) \quad si \quad 1 - \dfrac{1}{2p} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et prolongée à $\mathbb{R}$ par:

$$w_p(-x) = w_p(x) \qquad et \qquad w_p(2+x) = -w_p(x).$$

a) Etudier la continuité et la périodicité de $w_p$.
Représenter graphiquement $w_1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $v_p$ la primitive de $w_p$ s'annulant en 0.
Donner l'expression de $v_p(x)$ pour $0 \le x \le 1$.
Exprimer $v_p(-x)$ et $v_p(2+x)$ en fonction de $v_p(x)$.
Représenter graphiquement $v_1$ sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $u_p$ la primitive de $v_p$ s'annulant en 1.
Donner l'expression de $u_p(x)$ pour $0 \le x \le 1$.
Exprimer $u_p(-x)$ et $u_p(2+x)$ en fonction de $u_p(x)$.
Représenter graphiquement $u_1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Déterminer les réels suivants:

$$M_0(p) = \sup_{x\in R}\left|u_p(x)\right| \ , \ M_1(p) = \sup_{x\in R}\left|u'_p(x)\right| \ , \ M_2(p) = \sup_{x\in R}\left|u''_p(x)\right|.$$

Quelles sont les limites de $M_0(p)$, $M_1(p)$ et $M_2(p)$ lorsque p tend vers l'infini?
En déduire que la majoration de $M_1$ en fonction de $M_o$ et de $M_2$ obtenue à la question I.2° est optimale.

e) On désigne par $U_p$ la primitive s'annulant en 0 de la fonction $u_p$.
Montrer à l'aide de cette fonction $U_p$ que les majorations de $M_1$ et de $M_2$ obtenues précédemment en III.2° sont optimales.

***