CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1992

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mardi 12 mai 1992, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

-. Règles graduées.
-. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Dans tout le problème, on désigne par N un nombre entier naturel non nul donné.

On se propose d'étudier un algorithme de calcul d'une valeur approchée de tan θ à 10^{-N} près, où θ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, n'utilisant que des additions, des multiplications par des puissances de 10, une seule division et des tests de comparaison entre nombres réels (les soustractions éventuelles étant comptabilisées comme des additions).

On rappelle que si a et b sont des nombres réels appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

PARTIE I

L'objet de cette partie est d'étudier une suite $(\alpha_n)_{0 \leq n \leq N+1}$ d'éléments de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

1. *Étude de la fonction tangente*

a) Dresser le tableau de variation de la fonction tangente sur l'intervelle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donner l'allure de sa représentation graphique C sur cet intervalle. On précisera les tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{4}$.

b) Montrer qu'un algorithme de calcul approché de tan θ lorsque θ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ permet le calcul approché de tan θ pour tout nombre réel θ tel que tan θ soit défini.

2. *Étude de la fonction réciproque de la fonction tangente*

a) Montrer que la fonction tangente définit une bijection strictement croissante f de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Dans toute la suite, on note g la fonction réciproque de f (appelée fonction arc tangente). Donner l'allure de sa représentation graphique.

b) Prouver que g est de classe C^1 sur $]-\infty, +\infty[$ et que, pour tout nombre réel t :

$$g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

c) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel p :

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \cdots + (-1)^p t^{2p} + (-1)^{p+1} \frac{t^{2p+2}}{1+t^2}$$

d) En déduire que, pour tout nombre réel x positif ou nul :

$$x - \frac{x^3}{3} \leq g(x) \leq x \qquad (1)$$

e) En déduire aussi que, pour tout nombre entier naturel p et pour tout nombre réel x positif ou nul :

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + R_p(x) \qquad \text{où} \quad |R_p(x)| \leq \frac{x^{2p+3}}{2p+3} \qquad (2)$$

3. *Construction de la suite* $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N+1}$

a) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à N, il existe un élément α_n et un seul de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que tan $\alpha_n = 10^{-n}$. Préciser la valeur de α_0.

b) On convient de poser $\alpha_{N+1} = 0$. Prouver que la suite $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N+1}$ est strictement décroissante.

c) Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, il existe un nombre entier naturel n et un seul compris entre 1 et $N+1$ tel que $\alpha_n \leq x < \alpha_{n-1}$.

4. *Étude de la suite* $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N+1}$

a) Prouver que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$g(10\,x) < 10\,g(x)$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à $N-1$:

$$\alpha_n < 10\,\alpha_{n+1} \qquad (3)$$

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à N :

$$\frac{1}{10^n}\left(1 - \frac{1}{3\times 10^{2n}}\right) \leq \alpha_n \leq \frac{1}{10^n}$$

c) En déduire que, dans l'inégalité (3), on ne peut pas remplacer 10 par un nombre strictement plus petit (indépendant de n et de N).

d) En déduire aussi que, pour tout nombre entier naturel n compris entre 1 et $N-1$:

$$9\,\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \tag{4}$$

e) Prouver enfin que :

$$7\,\alpha_1 \leq \alpha_0 < 8\,\alpha_1 \tag{5}$$

5. *Algorithme de calcul de valeurs approchées des nombres* α_n

Soit K un nombre entier naturel non nul. À partir de la relation (2), indiquer un algorithme de calcul d'une valeur approchée de α_n, où $1 \leq n \leq N$, à la précision 10^{-K}.

Montrer qu'on peut prendre pour p le plus petit des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à $\dfrac{K-3}{2\,n}$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que les nombres $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N$ sont connus avec une précision suffisante pour qu'on puisse négliger dans les calculs l'influence des erreurs commises sur leurs valeurs.

PARTIE II

On suppose désormais donné un élément θ de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et on construit une suite $(\theta_n)_{n\geq 0}$ de valeurs approchées de θ de la forme $\theta_0 = 0$ et :

$$\theta_n = \alpha_{h(1)} + \alpha_{h(2)} + \cdots + \alpha_{h(n)} \qquad \text{pour tout entier } n \geq 1$$

où, pour tout nombre entier naturel non nul k, $h(k)$ est un entier compris entre 1 et $N+1$. On approche alors $\tan\theta$ à l'aide de la suite $(\tan\theta_n)$ et on indique un algorithme de calcul des nombres $\tan\theta_n$.

1. *Construction de la suite* (θ_n)

a) Montrer qu'on peut construire une application h et une seule de $\mathbb{N}$ dans $[0, ..., N+1]$ telle que :

$$\begin{aligned}
&h(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad h(k) \geq 1 \quad \text{pour } k \geq 1 \\
&\alpha_{h(1)} \leq \theta < \alpha_{h(1)-1} \\
&\alpha_{h(n)} \leq \theta - \left[\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n-1)}\right] < \alpha_{h(n)-1} \qquad \text{pour tout entier } n \geq 2
\end{aligned}$$

b) Établir que l'application h est croissante et que $h(n)$ est égal à $N+1$ dès que n est assez grand.

Dans toute la suite, on note m le nombre entier naturel tel que $h(m) < N+1$ et $h(n) = N+1$ pour $n \geq m+1$.

c) Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$\theta_n = \alpha_{h(1)} + \alpha_{h(2)} + \cdots + \alpha_{h(n)}$$

On convient de poser $\theta_0 = 0$.

Montrer que l'obtention de $h(1), h(2), ..., h(m)$ et de $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ ne nécessite que des additions et des tests de comparaison.

2. *Propriétés de la suite* (θ_n)

a) Établir que $\theta_n < \theta_m$ pour $n < m$ et $\theta_n = \theta_m$ pour $n \geq m$.

b) Montrer que $\theta_m \leq \theta < \theta_m + \alpha_N$.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1992

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mardi 12 mai 1992, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

–. Règles graduées.
–. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Dans tout le problème, on désigne par N un nombre entier naturel non nul donné.

On se propose d'étudier un algorithme de calcul d'une valeur approchée de tan θ à 10^{-N} près, où θ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, n'utilisant que des additions, des multiplications par des puissances de 10, une seule division et des tests de comparaison entre nombres réels (les soustractions éventuelles étant comptabilisées comme des additions).

On rappelle que si a et b sont des nombres réels appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

PARTIE I

L'objet de cette partie est d'étudier une suite $(\alpha_n)_{0 \leq n \leq N+1}$ d'éléments de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

1. *Étude de la fonction tangente*

a) Dresser le tableau de variation de la fonction tangente sur l'intervelle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donner l'allure de sa représentation graphique C sur cet intervalle. On précisera les tangentes à la courbe C aux points