Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1993

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Lundi 10 mai 1993 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées:

–. Règles graduées.
–. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

PROBLÈME 1

I. Soit E un espace vectoriel réel ; on note $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, O l'endomorphisme nul de E, e l' endomorphisme identité de E.

Pour tout φ de $\mathscr{L}(E)$, on note $\varphi^0 = e$, $\varphi^1 = \varphi$, et, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$: $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$.

Soient
- p, q deux éléments de $\mathscr{L}(E)$ non nuls et tels que $p + q = e$,
- a, b deux réels distincts et non nuls,
- f un élément de $\mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\begin{cases} f = ap + bq \\ f^2 = a^2 p + b^2 q . \end{cases}$$

1. a. Montrer : 1) $(f - ae) \circ (f - be) = (f - be) \circ (f - ae) = O$.

2) $\begin{cases} f - ae = (b - a)\, q \\ f - be = (a - b)\, p . \end{cases}$

b. En déduire : $p \circ q = q \circ p = O$.

c. Montrer : $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.

2. Prouver, pour tout n de IN : $f^n = a^n p + b^n q$.

3. a. Calculer : $f \circ \left(\frac{1}{a} p + \frac{1}{b} q \right)$.

b. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} à l'aide de p, q, a, b.

4. a. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est $\{a, b\}$.

b. En supposant que E est de dimension finie, f est-il diagonalisable ?

II. On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 13 & -60 & 20 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 24 & -5 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$;

on note 0 la matrice nulle.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^2 = \alpha M + \beta I$ et calculer (α, β).

2. En déduire deux réels a, b tels que :

$(M - aI)(M - bI) = 0$.

3. Montrer qu'il existe un couple (A, B) d'éléments de $M_3(\mathbb{R})$, que l'on exprimera en fonction de M et I, tel que :

$$\begin{cases} A + B = I \\ aA + bB = M . \end{cases}$$

4. En déduire la valeur de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on donnera de façon explicite les neuf coefficients de la matrice).

PROBLÈME 2

Les parties **I** et **II** sont indépendantes. La résolution de la partie **III** utilise les notations et des résultats des parties **I** et **II**.

Partie I

A. Soit f l'application de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \text{et} \\ \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], \ f(x) = \dfrac{x}{\sin x} . \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

3. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 5 cm).

B. Soit g une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe un réel $A \geq 0$, tel que pour tout réel $x > 0$:

$$\left| \int_0^1 \sin(xt)\, g(t)\, dt \right| \leq \frac{A}{x} .$$

2. En déduire la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^1 \sin(xt)\, g(t)\, dt .$$

C. Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $P(0) = 0$.

1. On nomme φ l'application de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{P(x)}{\sin\frac{\pi x}{2}}$.

a. Exprimer φ à l'aide de la fonction f étudiée au **A.**

b. En déduire que φ possède un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Le définir.

2. Montrer enfin que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P(t)\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t}{\sin\frac{\pi t}{2}}\, dt = 0$.

Partie II

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par h l'application de E dans E qui, à tout polynôme P, associe le polynôme $Q = h(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x (t-x)P(t)\,dt + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)\,dt .$$

A. Étude de h.

1. Soit $P \in E$ et $Q = h(P)$.

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q'(x) = x\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt - \int_0^x P(t)\,dt$.

b. Calculer Q''.

2. Montrer que h est une application linéaire et que
- le noyau de h, $\mathscr{K}er(h)$, est l'ensemble des polynômes constants,
- l'image de h, $\mathscr{I}m(h)$, est l'ensemble des polynômes Q tel que $Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0$. (On pourra calculer pour un tel polynôme Q, $h(Q'')$.).

B. Étude d'une suite de polynômes.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - x \\ \text{et} \\ \forall n \geq 2,\ P_n = h(P_{n-1}) . \end{cases}$$

1. Calculer P_2 et P_3.

2. Quelles sont les valeurs de $P_n(0)$, $P'_n(0)$ et $P'_n(1)$, pour $n \geq 2$?

3. Exprimer, en fonction de n, le monôme de plus haut degré de P_n.

4. Déduire du **II A.** 1. la relation : pour $n \geq 2$, $P''_n = \displaystyle\int_0^1 P_{n-1}(t)\,dt - P_{n-1}$.

Établir alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les deux relations :

$$\forall n \geq 2\,,\quad \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,dt\,,$$

puis

$$\forall n \geq 1\,,\quad \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}.$$

Partie III

A. 1. Établir, pour tout N entier naturel non nul :

$$\forall t \in \,]0,\pi]\,,\quad \sum_{k=1}^{N}\cos(kt) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

2. En déduire, pour N et n entiers naturels non nuls,

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n}\int_0^1 P_n(t)\left(\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\pi t}{2\sin\frac{\pi t}{2}} - \frac{1}{2}\right)dt\,,$$

puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2}\int_0^1 P_n(t)\,dt\,.$$

3. **Application.** Montrer que les sommes de séries $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$, et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^6}$ peuvent s'exprimer sous la forme $\frac{\pi^a}{b}$ où a et b sont des entiers que l'on calculera.

B. 1. On pose $P_n = \sum_{p=0}^{2n} a_{n,p}X^p$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\left|\begin{array}{l} a_{n,0} = 0\,, \\ a_{n,1} = 0\,, \\ a_{n,2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{p=0}^{2n-2}\frac{a_{n-1,p}}{p+1}\,, \\ a_{n,p} = -\dfrac{a_{n-1,p-2}}{p(p-1)}\,,\ \text{pour tout entier } p \in [3,2n]. \end{array}\right.$$

2. Le but de cette question est d'écrire un programme permettant de calculer le réel β_n tel que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \beta_n\pi^{2n},$$

pour un entier n, $1 \leq n \leq 25$, donné par l'utilisateur.

a. Quel type de variable informatique est adapté à la représentation d'un polynôme ?

b. Écrire un programme en PASCAL qui calcule les coefficients de P_n puis le réel β_n et l'affiche.