CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

mardi 18 mai 1993, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

–. Règles graduées.
–. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Étant donné un nombre entier naturel non nul n et un ensemble E à n éléments, on appelle *involution* de E toute bijection f de E sur lui-même telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$, où Id désigne l'application identique de E.

L'objectif du problème est l'étude du nombre T_n d'involutions de E et, en particulier, la recherche d'un équivalent du nombre T_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie I : *étude du nombre T_n d'involutions de E*

1. Calculer T_1, T_2 et T_3.

2. On suppose désormais $n \geq 3$.

a) Déterminer en fonction de T_i, où $1 \leq i < n$:

— le nombre des involutions s de $[1, n]$ telles que $s(n) = n$;

— le nombre des involutions s de $[1, n]$ telles que $s(n) = k$, où k est un nombre entier donné de $[1, n-1]$.

b) En déduire la relation suivante :

(1) $$T_n = T_{n-1} + (n-1)\, T_{n-2}$$

3. Rédiger en PASCAL un algorithme permettant le calcul des p premiers termes de la suite (T_n) pour un nombre entier donné $p \geq 3$.

En programmant cet algorithme, expliciter les valeurs de T_n pour $n \leq 10$.

Partie II : ***interprétation de T_n à l'aide d'une suite de polynômes***

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbf{R}$ par la relation :

$$u(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par $u^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de u. On note H_n la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par la relation :

$$u^{(n)}(x) = H_n(x)\, u(x) \qquad (2)$$

0. Critiquer le sout précédent.

1. *a*) Exprimer $u'(x)$ en fonction de $u(x)$ et x.

En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier $n \geq 2$:

$$u^{(n)}(x) = x u^{(n-1)}(x) + (n-1)\, u^{(n-2)}(x) \qquad (3)$$

b) Calculer H_0 et H_1, puis déduire des relations précédentes l'expression de $H_n(x)$ en fonction de $H_{n-1}(x)$, $H_{n-2}(x)$ et x.

c) Prouver que H_n est un polynôme dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le signe sur $[0, +\infty[$.

d) Comparer T_n et $H_n(1)$.

2. *a*) En dérivant la relation (2) et en utilisant la relation entre $H_{n+1}(x)$, $H_n(x)$, $H_{n-1}(x)$ et x, établir la relation suivante, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$H'_n(x) = n\, H_{n-1}(x) \qquad (4)$$

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $H_n(0)$ et $H'_n(0)$ en fonction de n. (On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

3. *a*) Établir que, pour tout nombre entier naturel n :

$$H''_n(x) + x H'_n(x) - n\, H_n(x) = 0$$

(On pourra dériver deux fois la relation (2).)

b) Dans toute la suite du problème, pour tout nombre entier naturel n, on note v_n la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par la relation :

$$v_n(x) = H_n(x)\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

Étudier le signe de v_n et de v_n' sur $[0, +\infty[$. Calculer $v_n(0)$ et $v_n'(0)$.

c) Exprimer $v_n''(x)$ en fonction de $v_n(x)$ et x.

d) En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:

(5) $$\left(n+\frac{1}{2}\right)v_n(x) \leq v_n''(x) \leq \left(n+\frac{3}{4}\right)v_n(x)$$

Dans toute la suite du problème, on posera :

$$\alpha_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}} \qquad \beta_n = \sqrt{n+\frac{3}{4}}$$

Partie III : ***recherche d'un équivalent de T_n***

On étudie tout d'abord un équivalent de T_n lorsque l'entier $n = 2p$ est pair.

1. On établit dans cette question un résultat préliminaire permettant d'encadrer une fonction numérique définie sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives, de classe C^2 et satisfaisant aux relations :

(6) $$\alpha^2 f(x) \leq f''(x) \leq \beta^2 f(x) \qquad f(0) = a \qquad f'(0) = 0$$

où a, α, et β sont des nombres réels strictement positifs donnés.

a) Déterminer des nombres réels λ et μ tels que la fonction numérique φ définie sur $[0, 1]$ par la relation :

$$\varphi(x) = \lambda\exp(\beta x) + \mu\exp(-\beta x)$$

c'est sans doute φ'' !! Mais si vous y tenez...

vérifie $\varphi(0) = a$ et $\varphi'(0) = 0$.
Indiquer alors le signe de φ sur $[0, 1]$ et exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

b) Soit w la fonction numérique définie sur $[0, 1]$ par la relation :

$$w = f\varphi' - \varphi f'$$

Calculer $w(0)$. Étudier le signe de w', puis celui de w.

c) En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1], l'inégalité $f(x) \leq \varphi(x)$. $\left(\frac{\varphi}{f}\right)' \cdots$

d) Établir, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1], l'inégalité suivante :

$$f(x) \leq \frac{a}{2}\left[\exp(\beta x) + 1\right] \tag{7}$$

e) Établir de même que, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1] : Reprendre la démarche précédente

$$\frac{a}{2}\exp(\alpha x) \leq f(x) \tag{8}$$

2. *a*) À l'aide de la relation (5), établir que, pour tout nombre entier naturel p :

$$H_{2p}(0)\,\frac{\exp(\alpha_{2p})}{2} \leq \exp\left(\frac{1}{4}\right) H_{2p}(1) \leq H_{2p}(0)\,\frac{\exp(\beta_{2p}) + 1}{2}$$

b) On admet la formule de Stirling : $n\,! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi\, n}$

D'après la partie II : $H_{2p}(0) = \dfrac{(2p)!}{2^p\, p!}$

En déduire que, pour $n = 2p$, on a :

$$T_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{1}{4}\right)\exp\left(\sqrt{n}\right)\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n/2} \tag{9}$$

c) Donner une valeur approchée du quotient des deux membres de cette expression pour $n = 10$.

On étudie enfin un équivalent de T_n lorsque l'entier n est impair ($n = 2p + 1$)

3. On établit par des méthodes analogues à celles de la question III.1 que, si g est une fonction numérique définie sur [0, 1] à valeurs strictement positives sur]0, 1] de classe C^2 et satisfaisant aux relations :

$$\alpha^2 g(x) \leq g''(x) \leq \beta^2 g(x) \qquad g(0) = 0 \qquad g'(0) = a \tag{10}$$

où a, α, et β sont des nombres réels strictement positifs donnés, alors, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1] :

$$\frac{a}{2\alpha}\left[\exp(\alpha x) - 1\right] \leq g(x) \leq \frac{a}{2\beta}\exp(\beta x)$$

(On ne demande pas de justifier cet encadrement.)

a) En déduire que, pour $n = 2p + 1$:

$$H_n(1) \sim \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{4}\right)\sqrt{n}\,\exp\sqrt{n}\; H_{n-1}(0)$$

b) En conclure que la relation (9) est encore valable lorsque le nombre entier n est impair.