ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

MATHEMATIQUES I

Option générale

Mercredi 19 mai 1993 de 14h à 18h

Sont autorisées :
- *Règles graduées.*
- *Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.*

L'objet du problème, développé dans la partie III, est l'obtention de valeurs approchées du nombre π.
Dans toute la suite, on désigne par n un entier naturel et par a un nombre réel supérieur ou égal à 1. On notera aussi, pour simplifier les écritures: $b = a^2 + 1$.

Partie I: étude d'intégrales.

1°) On désigne par p, q des entiers naturels et l'on étudie l'intégrale:

$$I(p,q) = \int_0^1 t^{2p}(1-t^2)^q \, dt.$$

a) On suppose que $q \geq 1$. Former une relation de récurrence entre $I(p, q)$ et $I(p+1, q-1)$.
b) En déduire l'expression à l'aide de factorielles de l'intégrale $I(p, q)$, et en particulier celle de l'intégrale $I(p, p)$ que l'on notera $J(p)$ dans la suite du problème.
c) En étudiant le maximum sur $[0, 1]$ de $t \to t^2(1-t^2)$, établir que l'on a $0 \leq J(p) \leq 1/4^p$.

2°) On étudie dans cette question l'intégrale:

$$f(a) = \int_0^{1/a} \frac{dt}{1+t^2}.$$

a) Calculer $f(1)$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(\theta)$.
b) Etablir pour $a \neq 1$ l'égalité suivante:

$$(1) \qquad f(a) + f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = f(1).$$

(on pourra utiliser dans l'intégrale donnant $f((a+1)/(a-1))$ le changement de variable défini par $t = (ax - 1)/(x + a)$).

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise-Yvelines

c) Etablir que:

$$f(a) = a\int_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2}.$$

Partie II: étude d'une suite de polynômes.

1°) On considère les fonctions-polynômes définies par: $P_n(x) = 1 + \lambda_n x^n(1-x)^n$.
Déterminer le nombre réel λ_n pour que $-a^2$ soit racine de P_n.

On supposera λ_n ainsi choisi dans toute la suite du problème.
On désignera alors par Q_n la fonction polynôme définie par: $P_n(x) = (x + a^2)Q_n(x)$.

2°) a) Expliciter Q_0 et Q_1.
b) En considérant $P_{n+1}(x) - P_n(x)$, établir pour tout nombre réel x la formule suivante:

$$(2) \qquad Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = \left[-\frac{x(1-x)}{a^2 b}\right]^n Q_1(x).$$

En déduire l'expression de $Q_2(x)$.

Partie III: détermination de valeurs approchées de π.

1°) Une première approximation de π.
On pose:

$$u_n(a) = a\int_0^1 Q_n(t^2)dt.$$

a) Calculer $u_1(a)$ et $u_2(a)$.
b) Vérifier que:

$$u_2(a) = a\int_0^1 \frac{P_2(t^2)dt}{a^2+t^2}.$$

En déduire la double inégalité suivante:

$$u_2(a) + \frac{J(2)}{a^3 b^3} \le f(a) \le u_2(a) + \frac{J(2)}{a^5 b^2}.$$

c) Donner un encadrement décimal de f(2) et f(3) (avec les 6 premières décimales).
d) A l'aide de la relation (1), en déduire une valeur décimale approchée du nombre π (avec les 6 premières décimales, et une indication sur la précision obtenue).

2°) Généralisation.
a) Etablir l'inégalité suivante:

$$(3) \qquad |u_n(a) - f(a)| \le \frac{1}{(4a^2b)^n a}.$$

b) Etablir à l'aide de l'égalité (2) que:

$$u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n aJ(n)}{(a^2b)^{n+1}} \, \frac{2(2b-1)n+3b-1}{4n+3}.$$

c) On pose: $v_n(a) = u_{n+1}(a) - u_n(a)$.
Exprimer pour $n \ge 1$ le rapport $v_{n+1}(a) / v_n(a)$ en fonction de n et de a.
d) On donne un entier naturel n et un nombre réel a supérieur à 1. Rédiger en PASCAL:
- une procédure de calcul de $u_k(a)$ pour $0 \le k \le n$ (on utilisera la suite $(v_k(a))$).
- une procédure de calcul d'une valeur approchée de π (on utilisera la relation (1).

e) On choisit n = 5 et a = 2. Quelle valeur approchée de π obtient-on ainsi? Indiquer à l'aide de l'inégalité (3) la précision de cette approximation.

3°) Recherche d'un choix optimal pour a.
On suppose dans cette question que a > 1 et l'on pose:

$$w_n(a) \quad = \quad 4\left[u_n(a) + u_n\left(\frac{a+1}{a-1}\right)\right].$$

a) Soit c le plus petit des deux nombres a et (a+1) / (a-1). Montrer que:

$$\left|w_n(a) - \pi\right| \quad \leq \quad \frac{8}{c\left[4c^2(1+c^2)\right]^n}.$$

b) Tracer la courbe représentative de la fonction définie pour a > 1 par:

$$a \quad \rightarrow \quad \min(a, \frac{a+1}{a-1}).$$

En déduire pour quelle valeur a_o de a le nombre c défini ci-dessus est maximal.
c) On choisit a = 5/2. Donner un majorant de $|w_n(a) - \pi|$. Qu'obtient-on alors pour n = 5?

*****
**