ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

MATHEMATIQUES II

Option générale

Mercredi 12 mai 1993 de 8h à 12h

Sont autorisées :

- *Règles graduées.*
- *Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.*

L'objet de ce problème est l'étude d'une suite d'expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p (ceci signifiant qu'à chaque expérience, la probabilité de succès est égale à p, où p est un réel donné tel que $0 < p < 1$).
Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'analyse, avant d'étudier dans la partie II l'obtention de r succès consécutifs (où r désigne un entier donné tel que $r \geq 2$).

PARTIE 1

On désigne par S l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes.
On se propose, dans cette partie, d'obtenir la limite d'une suite $u = (u_n)$ de S vérifiant pour tout entier naturel $n \geq r-1$ la relation suivante:

$$(1) \qquad u_n + pu_{n-1} + p^2u_{n-2} + \ \dots \ + p^{r-1}u_{n-r+1} = p^r.$$

1°) On considère le nombre complexe $\omega_r = \exp(2i\pi/r) = \cos(2\pi/r) + i.\sin(2\pi/r)$.

a) Déterminer en fonction de ω_r les racines complexes de l'équation $z^r = 1$.

b) Soient x, y des entiers. Expliciter la valeur des sommes suivantes:

$$s_r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{kx} \qquad ; \qquad t_r(x,y) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{-xk}\omega_r^{ky}.$$

Pour calculer $s_r(x)$, on distinguera 2 cas, selon que x est ou non multiple de r.

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise-Yvelines

2°) On considère la matrice M_r carrée d'ordre r définie par:

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_r & \cdots & \omega_r^{y-1} & \cdots & \omega_r^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_r^{x-1} & \cdots & \omega_r^{(x-1)(y-1)} & \cdots & \omega_r^{(x-1)(r-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_r^{r-1} & \cdots & \omega_r^{(r-1)(y-1)} & \cdots & \omega_r^{(r-1)(r-1)} \end{bmatrix}.$$

On désigne par $\overline{M_r}$ la matrice conjuguée de M_r, c'est à dire la matrice carrée d'ordre r dont les éléments sont les conjugués des éléments de la matrice M_r.

a) Expliciter à l'aide du nombre complexe i l'expression de M_r pour r = 4, puis calculer le produit $\overline{M_4}M_4$.

b) A l'aide des résultats de la question 1, expliciter l'expression de $\overline{M_r}M_r$ dans le cas général, et en déduire que M_r est une matrice inversible.

c) On considère r nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ tels que, pour $0 \leq n \leq r-1$:

$$\lambda_0 + \lambda_1 \omega_r^n + \lambda_2 \omega_r^{2n} + \ \ldots \ + \lambda_{r-1} \omega_r^{(r-1)n} = 0.$$

Etablir que ces r nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ sont nuls.

d) En déduire l'indépendance des r suites géométriques suivantes:

$$e_0 = (p^n), \quad e_1 = (p^n \omega_r^n), \quad e_2 = (p^n \omega_r^{2n}), \quad \ldots \quad , \quad e_{r-1} = (p^n \omega_r^{(r-1)n}).$$

3°) On étudie dans cette question les suites v = (v_n) de S qui vérifient pour tout entier naturel $n \geq r-1$ la relation suivante:

$$(2) \qquad v_n + p v_{n-1} + p^2 v_{n-2} + \ \ldots \ + p^{r-1} v_{n-r+1} = 0.$$

a) Etablir que les suites vérifiant (2) forment un sous-espace vectoriel E de S.

b) Prouver que l'application F associant à tout élément v = (v_n) de E l'élément de $\mathbb{C}^{r-1}$ défini par $F(v) = (v_0, v_1, \ldots, v_{r-2})$ est linéaire et bijective.
En déduire la dimension de E.

c) Etablir que les suites $e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}$ appartiennent à E, et prouver que ce sont les seules suites géométriques de premier terme égal à 1 dans E.

d) En déduire que les suites $e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}$ forment une base de E.
Donner la forme générale des suites v = (v_n) vérifiant (2). En déduire la limite d'une telle suite lorsque n tend vers $+\infty$.

4°) On étudie dans cette question les suites complexes u = (u_n) vérifiant (1).

a) Déterminer une suite constante c = (c_n) vérifiant (1).

b) Etablir que la suite u = (u_n) vérifie (1) si et seulement si la suite v = (v_n), définie par la relation v = u - c, vérifie (2).

c) En déduire enfin la limite d'une suite u = (u_n) vérifiant (1).

***

PARTIE 2

On se propose, dans cette partie, d'étudier la réalisation de suites de r succès consécutifs au cours de la suite des expériences de Bernoulli décrites dans le préambule.
Pour tout entier $n \geq 1$, on désignera par S_n l'événement:

"Obtenir un succès à la $n^{ème}$ expérience".

1°) <u>Probabilité d'obtenir au moins une suite de r succès.</u>
On considère pour tout entier $n \geq 1$ l'événement E_n = "$S_{rn-(r-1)}$ et ... et S_{rn-1} et S_{rn}":

"Obtenir un succès aux $[rn-(r-1)]^{ème}$, ... , $[rn-1]^{ème}$ et $[rn]^{ème}$ expériences".

a) Déterminer la probabilité des événements suivants:

$$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E}_k = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ \ldots \ \cap \overline{E}_n \quad ; \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E}_k = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ \ldots \ \cap \overline{E}_n \cap \ \ldots$$

(intersection des complémentaires de E_1, E_2, ... , E_n, puis de E_1, E_2, ... , E_n, ...).

b) En déduire que l'obtention de r succès consécutifs est un événement réalisé avec une probabilité égale à 1.

2°) <u>Probabilité d'obtenir une suite de r succès s'achevant à la n° expérience.</u>
Pour tout entier $n \geq r$, on désigne par U_n l'événement:
"Obtenir une suite de r succès consécutifs s'achevant à la $n^{ème}$ expérience, c'est à dire une suite de succès aux $[n-(r-1)]^{ème}$, ... , $(n-1)^{ème}$, $n^{ème}$ expériences, dont aucun d'eux n'a déjà été comptabilisé dans une suite antérieure de r succès consécutifs".
Par exemple, si $r = 3$ et si l'on désigne par S l'obtention d'un succès et par E l'obtention d'un échec, la suite d'expériences représentée par:

$$\underline{S\ S\ S}\ \ \underline{S\ S\ S}\ \ S\ E\ E\ \ \underline{S\ S\ S}\ \ S\ S\ E\ S\ E\ \ \underline{S\ S\ S}\ \ S\ E\ \ldots$$

mène à la réalisation des événements U_3, U_6, U_{12}, U_{20}, ... , c'est à dire de suites de 3 succès consécutifs s'achevant aux $3^{ème}$, $6^{ème}$, $12^{ème}$, $20^{ème}$, ... expériences.
On note enfin u_n la probabilité de l'événement U_n.

On posera par convention $u_0 = 1$ *et* $u_1 = u_2 = \ldots = u_{r-1} = 0$.

a) Montrer que la réalisation de l'événement "$S_{n-(r-1)}$ et ... et S_{n-1} et S_n" implique la réalisation d'un et un seul des événements $U_{n-(r-1)}, \ldots , U_{n-1}, U_n$ pour $n \geq r$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifie (1).
Quelle est la limite L de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

b) En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour qu'une suite de 2 Faces (respectivement de 2 As) consécutifs s'achève à la $n^{ème}$ expérience dans une suite de jets d'une pièce équilibrée (respectivement d'un dé équilibré).

3°) <u>Etude de la première suite de r succès consécutifs.</u>
On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro n de l'expérience où, *pour la première fois,* s'achève une suite de r succès consécutifs.
Dans l'exemple donné dans la question 2, X prend donc la valeur 3.

On posera donc par convention $P(X = 0) = P(X = 1) = \ldots = P(X = r-1) = 0$.

a) Vérifier à l'aide des résultats obtenus à la question 1 que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} P(X = n) = 1.$$

b) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0, 1[:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

Justifier la convergence de cette série, puis établir à l'aide de (1) que:

$$U(x) = 1 + \frac{(px)^r}{1-(px)^r}\frac{1-px}{1-x}.$$

c) Pour tout entier $n \geq r$, montrer que, si l'événement U_n est réalisé, une première suite de r succès consécutifs s'est achevée à l'une des n premières expériences.
En déduire la relation suivante pour tout entier $n \geq 1$:

$$(3) \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)u_{n-k}.$$

d) A tout couple de séries convergentes à termes positifs Σa_n et Σb_n, on associe la série dite série-produit Σc_n, où $c_n = a_o b_n + \ldots + a_k b_{n-k} + \ldots + a_n b_o$.
Vérifier que l'on a pour tout entier naturel n:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k . \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

En déduire la convergence et la somme de la série-produit Σc_n.
e) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0, 1]:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)x^n.$$

Justifier la convergence de cette série, puis déterminer une relation liant U(x) et G(x) pour tout réel x appartenant à [0, 1[(on pourra multiplier (3) par x^n et sommer les égalités obtenues pour $n \geq 1$).
f) En déduire l'expression de G(x) pour $0 \leq x < 1$, puis vérifier que G est continue, y compris en x = 1.

4°) <u>Temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs.</u>
a) On *admet* que l'on peut dériver terme à terme la fonction G sur [0, 1].
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, numéro de l'expérience où s'achève la première suite de r succès consécutifs.
b) On suppose p = 1/2 (pièce équilibrée), puis p = 1/6 (dé équilibré), et l'on effectue à chaque seconde une expérience. Donner dans un tableau en secondes, minutes, heures, jours, années le temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs lorsque r = 5, r = 10, r = 25.
(A titre de comparaison, l'âge de l'Univers est estimé à 15 milliards d'années).

****
**