CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

jeudi 20 mai 1993, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

- Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

On désigne par K le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Dans tout le problème, on considère l'espace vectoriel K^n (où $n \geq 2$) rapporté à sa base canonique, notée $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On note v_1 le vecteur de K^n dont les composantes dans la base B sont toutes égales à 1.

On rappelle que l'espace vectoriel K^n est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G, ce qu'on note $K^n = F \oplus G$, si tout vecteur x de K^n peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y + z$, où y appartient à F et z appartient à G. L'application $p : x \mapsto y$ est alors un endomorphisme de K^n, appelé projecteur sur F de direction G.

Enfin, l'application identique de K^n est notée Id.

On se propose d'étudier l'ensemble S_n des matrices stochastiques d'ordre n, c'est-à-dire des éléments $M = (m_{ij})$ de $\mathrm{M}_n(K)$ dont les coefficients sont réels positifs ou nuls et tels que, pour tout nombre entier i appartenant à $[1, n]$:

$$m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{in} = 1$$

(Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités.)

PARTIE I : *un premier exemple*

On considère des nombres réels a et b appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et tels que $a + b = 1$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base B est la matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

1. *a*) Déterminer à quelle condition un vecteur $v = (x, y, z)$ appartient au noyau de $f - \mathrm{Id}$; expliciter une base de ce sous-espace vectoriel.

b) Montrer que (e_2, e_3) est une base de l'image de $f - \mathrm{Id}$.

c) Établir que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$. Déterminer $p\,(v_1)$, puis $p\,(e_3)$, $p\,(e_2)$ et $p\,(e_1)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base B.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. On considère la base $B' = (v_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

a) Déterminer la matrice M' associée à f dans la base B'.

b) Pour tout nombre entier naturel non nul k, calculer par récurrence M'^k.

c) Déterminer la matrice de passage C de la base B à la base B'. Calculer son inverse.

d) Déduire de ces résultats l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les limites des coefficients de M^k). Comparer cette limite à la matrice P obtenue dans la question **1.**

PARTIE II : *un second exemple*

Dans cette partie, on suppose que $n \geq 3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base B est la matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *a*) Déterminer une base du noyau de $f - \mathrm{Id}$.

b) Montrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$ est une famille libre d'éléments de l'image de $f - \mathrm{Id}$, puis établir que c'en est une base.

c) Établir que $\mathbf{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$. Déterminer $p\,(v_1)$, puis $p\,(e_1), p\,(e_2), \dots, p\,(e_n)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base B.

e) Soit q le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$. Établir que $p + q = \mathrm{Id}$, et que $p \circ q = q \circ p = 0$. Expliciter la matrice Q associée à q dans la base B.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q. En déduire l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ en fonction des matrices P et Q. Exprimer de même l'inverse de M en fonction de P et Q.

PARTIE III : *étude du cas général*

1. Soit V_1 la matrice colonne d'ordre n dont les coefficients sont tous égaux à 1.

a) Montrer qu'une matrice M de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV_1 = V_1$.

b) En déduire que, pour tout couple (A, B) d'éléments de S_n, le produit AB appartient encore à S_n, de même que les puissances positives de A et B.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K et u un endomorphisme de E dont le noyau n'est pas réduit au vecteur nul.
Soit $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$, que l'on complète en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. Établir que $(u(e_{r+1}), u(e_{r+2}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$. En déduire que :

$$\dim \mathrm{Im}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\,(u) = n$$

Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dont la matrice $M = (m_{ij})$ dans la base B est stochastique. Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on convient de noter :

$$\lfloor x \rfloor = \max\,(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$

On remarquera que, pour tout couple (x, x') d'éléments de $\mathbf{C}^n$, $\lfloor x + x' \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor x' \rfloor$.

3. *a*) Établir que, pour tout élément x de $\mathbf{C}^n$, $\lfloor f(x) \rfloor \leq \lfloor x \rfloor$.

b) En déduire que les modules de toutes les valeurs propres de f sont inférieurs ou égaux à 1. Montrer que 1 est valeur propre de f.

4. *a*) Soit y un élément de $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id})$, écrit sous la forme $f(x)-x$. Pour tout nombre entier naturel non nul k, exprimer $f^k(x)$ en fonction de k, x et y.

Déduire du **3.** *a*) que $k\,|y| \leq 2|x|$, puis prouver que y est nul.

b) Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}) = \mathbf{C}^n$.

c) Montrer que, pour tout élément x de $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id})$, $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id})$.

Établir que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id})$.

On suppose désormais que l'endomorphisme f est diagonalisable.

5. *a*) Montrer que la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de f autres que 1 est égale à $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id})$.

b) On complète une base $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ de $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id})$ en une base $B' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs propres de f. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées par modules décroissants $(1 = |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_n|)$, associées à ces vecteurs propres $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Soit D la matrice associée à f dans la base B'.

Prouver que la suite (M^k) converge si et seulement si la suite (D^k) converge.

c) En déduite que la suite (M^k) converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

d) Dans ces conditions, montrer que la limite de la suite (M^k) est la matrice associée dans la base B au projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id})$.

Que permet de préciser le résultat établi dans la partie I ?