EXERCICE 1

Calcul approché de ln a pour $a \in [\,1\,,2\,]$.

La notation $f^{(p)}$ désigne la fonction dérivée d'ordre p de la fonction numérique f.

1° ***a)*** Soit $u\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $v\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les fonctions $u^{(p)}$ et $v^{(p)}$.

b) Soit $f\ :\ x \mapsto \ln \dfrac{1-x}{1+x}$.

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . Montrer qu'il existe deux réels λ et μ à préciser tels que :

$$\forall x \in D_f \qquad f'(x) = \lambda\, u(x) + \mu\, v(x)\,.$$

En déduire $f^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_f$.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(2k)}(0)$ et $f^{(2k+1)}(0)$.

Montrer que : $\forall x \in \left[\,0\,,\dfrac{1}{3}\right] \qquad \left|f^{(2n+3)}(x)\right| \leq (2n+2)\,!\,\dfrac{3^{2n+3}}{4^{n+1}}$.

d) On pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Montrer, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, que :

$$\forall x \in \left[\,0\,,\frac{1}{3}\right] \qquad \left|f(x) + 2\,S_n(x)\right| \leq \frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}\,.$$

2° ***a)*** Soit a un réel de l'intervalle $[\,1\,,2\,]$. On pose $x = \dfrac{a-1}{a+1}$.

Montrer, en utilisant **1°**, que : $\left|\ln a - 2\,S_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{4^{n+1}(2n+3)}$.

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle

$$\frac{1}{4^{n+1}(2n+3)} < 5 \times 10^{-4}$$

c) On choisit $a = \dfrac{3}{2}$; calculer x.

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ donner la valeur exacte de $\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Calculer $2\,S_3(x)$ (on écrira, avec toutes ses décimales, la valeur approchée de $2\,S_3(x)$ affichée par la calculatrice).

Comparer avec $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (on donnera l'ordre de grandeur de $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - 2\,S_3(x)$).

❖

EXERCICE 2

Démonstration de l'égalité : [1] $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-k}$.

1° Soit $g :]\,0\,,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto -x\ln x$

Etablir le tableau de variations de g.

2° A l'aide de la formule de Taylor-reste intégral, montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall u \in \mathbb{R}$ $\quad e^u = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k\,!} + R_n(u)$, où R_n est continue et vérifie :

$$\forall u \geq 0 \quad 0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^u .$$

3° Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^n\,\mathrm{d}u$.

a) Justifier l'existence de J_n .

b) Calculer J_0 ; à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre J_{k+1} et J_k , pour $k \in \mathbb{N}$; en déduire la valeur de J_n .

c) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in\,]\,0\,,1\,[$.

Effectuer sur l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^k(\ln x)^k\,\mathrm{d}x$ le changement de variable $v = -(k+1)\ln x$.

d) En déduire l'existence et la valeur de $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k(\ln x)^k\,\mathrm{d}x$.

4° ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!}\,I_k + r_n\,, \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)\,!\,e^{n+1}} .$$

b) En déduire l'égalité [1] .

5° Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$.

Montrer que s_7 , que l'on calculera avec toutes les décimales fournies par la calculatrice, est une valeur approchée à 10^{-7} près de $\int_0^1 x^{-x} \, dx$.

❖

PROBLEME

Probabilité de trouver un mot donné dans un texte aléatoire.

Dans tout le problème, p désigne un entier supérieur ou égal à 2 et toutes les suites sont définies pour $n \in \mathbb{N}^*$.

– Dans une grande école de commerce, un étudiant a programmé son (micro-)ordinateur de la façon suivante :
l'ordinateur fait imprimer un nombre, aussi grand que l'on veut, de caractères (des lettres), les uns après les autres, de manière aléatoire ; pour chaque caractère imprimé, la probabilité que ce soit une lettre donnée est constante.

– **L'étudiant cherche la probabilité pour qu'un mot précis de p lettres apparaisse au moins une fois dans le "texte" produit par l'ordinateur** (on ne tient pas compte des passages à la ligne).

– Soit X_j $(j \in \mathbb{N}^*)$ la variable aléatoire égale au *j–ième* caractère produit par la machine (voir note en bas de page).

– On note $\underline{x_0 x_1 \ldots x_{p-1}}$ la séquence de lettres qui forme le mot en question.

– Le mot voulu est écrit à partir du *i–ième* caractère si l'événement

$$\underline{A_i = (X_i = x_0) \bigcap (X_{i+1} = x_1) \bigcap \ldots \bigcap (X_{i+p-1} = x_{p-1})}$$

est réalisé.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse donc au calcul de $\underline{v_n = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)}$, qui représente la probabilité

pour que le mot voulu apparaisse au moins une fois dans la suite des $n + p - 1$ premiers caractères imprimés.

- On fait les deux hypothèses suivantes :

1)Les v.a. X_j suivent toutes la même loi de probabilité.

2)Les v.a. X_j sont mutuellement indépendantes.

Les deux parties du problème sont largement indépendantes : seuls les résultats des questions 1° et 8° de la première partie sont utiles pour la deuxième partie.

Note : pour avoir des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, il suffirait, par exemple, de remplacer les lettres par leurs rangs dans l'alphabet. Mais ceci n'a pas d'importance pour la suite du problème.

PREMIERE PARTIE : relation de récurrence satisfaite par (v_n).

1° Montrer que la suite (v_n) est croissante.

2° Montrer que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad P(A_i) = P(A_1).$$

Dans la suite du problème, **on note a cette constante** (qu'on suppose non nulle).

3° On dit qu'une séquence de lettres $x_0 x_1 \dots x_{p-1}$ est <u>superposable en partie</u> (en abrégé : s.e.p.) si et seulement si :

$$\exists i \in [[1, p-1]] \quad \forall j \in [[1, p-1]] \ (j \geq i \Rightarrow x_j = x_{j-i}).$$

Regarder si les séquences suivantes sont s.e.p. (et donner une valeur de i le cas échéant) :

a) ENTENDENT

b) ECRICOME

c) FINI

Dans la suite du problème, on suppose que :

la séquence $x_0 x_1 \dots x_{p-1}$ n'est pas s.e.p..

4° Soit q et r deux entiers strictement positifs.
Montrer que, si $1 \leq r \leq p-1$, alors A_q et A_{q+r} sont incompatibles.

5° Soit $k \geq p$. Montrer que : $v_{k+1} = v_k + a - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i \right) \cap A_{k+1} \right)$.

6° Quelles sont les variables X_j qui interviennent dans $\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i$?

Et dans A_{k+1} ? En déduire que : $v_{k+1} = v_k + a - a\, v_{k-p+1}$.

7° Calculer v_k pour $k \in [[1, p]]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\underline{u_n = 1 - v_n}$

8° Vérifier que (u_n) est une suite décroissante de réels de $[0, 1]$ telle que :

$$\begin{cases} \underline{\forall k \in [[1, p]] \quad u_k = 1 - ka} \\ \\ \underline{\forall k \geq p \qquad u_{k+1} = u_k - a u_{k-p+1}} \end{cases}$$

DEUXIEME PARTIE : étude de la suite (u_n) ; exemples .

1° Justifier la convergence de la suite (u_n) .
Quelle est sa limite ? En revenant à (v_n), quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

2° **Majoration de u_n .**
Montrer que : $\forall n \geq p \quad u_n \leq (1-a)^{n-p}(1-pa)$.

Retrouver ainsi la limite de (u_n).

3° **Etude du cas particulier :** $p = 2$ **et** $a = \frac{4}{25}$.

a) Calculer u_n en fonction de n.

b) On suppose que, pour chaque caractère imprimé, la probabilité pour que ce soit la lettre A (respectivement S) est $\frac{40}{75}$ (respectivement $\frac{3}{10}$) .
Quelle est la probabilité d'avoir au moins une fois le mot "AS" dans un texte de 51 caractères ? (on écrira toutes les décimales fournies par la calculatrice).

4° **On suppose dans cette question que** $p = 3$ **et** $a < \frac{2^2}{3^3}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}$.

Montrer que, pour $k \geq 3$, on peut écrire : $U_{k-1} = A\, U_{k-2}$, avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Déterminer l'expression de U_n en fonction de n, A, et U_1.

b) Montrer que les valeurs propres de la matrice A sont les nombres λ solutions de l'équation :

$$\lambda^3 - \lambda^2 + a = 0$$

c) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^3 - x^2 + a$;
En déduire que A admet trois valeurs propres réelles λ_1 , λ_2 , λ_3 vérifiant

$$-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \frac{2}{3} < \lambda_3 < 1 .$$

d) Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^{n-1} = Q\,D^{n-1}\,Q^{-1}.$$

(on ne demande pas d'expliciter Q)

e) En déduire qu'il existe trois réels α , β , γ, *qu'on ne demande pas de calculer*, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \alpha \lambda_1^{n-1} + \beta \lambda_2^{n-1} + \gamma \lambda_3^{n-1}$$

5° **Dans cette dernière question :** $p = 4$.

a) On suppose, dans ce ***a***), que, pour chaque caractère, la probabilité du F (resp. du I, du N) est 0.02 (resp. 0.1 , 0.05).

(i) Ecrire un algorithme qui, pour n donné, calcule u_n et affiche la probabilité d'avoir au moins une fois le mot "FINI" dans un texte de $n + 3$ caractères.

(ii) Donner les valeurs numériques obtenues (arrondies à 10^{-4} près) pour $n \in \{50 , 100 , 300\}$.

b) On cherche, comme au **4°** précédent, à établir une expression de u_n en fonction de n. On suppose que : $a < \dfrac{3^3}{4^4}$.

(i) Soit le polynôme $R = X^4 - X^3 + a$.

Montrer que R a deux racines réelles μ_1 et μ_2 . Vérifier qu'elles appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$.

(ii) Soit δ une racine complexe (non réelle) de R.

• Justifier son existence. Montrer que $\overline{\delta}$ est aussi racine de R.

(iii) Comment se factorise alors R dans $\mathbb{C}[X]$?

En considérant le produit des racines de R, montrer que : $|\delta|^2 = \dfrac{a}{\mu_1 \mu_2}$.

On démontre alors (et on admettra) que $|\delta| < 1$, et qu'il existe un unique quadruplet $(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_4) \in \mathbb{C}^4$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \alpha_1 \mu_1^{n-1} + \alpha_2 \mu_2^{n-1} + \alpha_3 \delta^{n-1} + \alpha_4 \overline{\delta}^{\,n-1}.$$

Montrer que α_1 et α_2 sont réels, et que $\alpha_4 = \overline{\alpha_3}$.