École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1994

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option économique)

Lundi 9 mai 1994 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées :

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

EXERCICE 1

On considère, pour tout réel a, la matrice $A(a)$ de $M_3(\mathrm{IR})$ suivante :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de $A(a)$, pour $a \in \mathrm{IR}$.

2. Étudier, suivant les valeurs du réel a, l'inversibilité de $A(a)$ dans $M_3(\mathrm{IR})$.

3. On suppose, dans cette question 3. seulement : $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq -1$.

   a. Montrer que $A(a)$ est diagonalisable.

   b. Calculer, pour chacune des valeurs propres de $A(a)$, un vecteur propre de $A(a)$ associé à cette valeur propre.

4. a. La matrice $A(0)$ est-elle diagonalisable ?

   b. Calculer $(A(0))^2$, $(A(0))^3$, et $(A(0))^n$ pour tout entier naturel n non nul.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2\sqrt{x}\,e^{-x}.$$

1. a. Dresser le tableau des variations de f.

   b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

   c. Tracer la courbe représentative de f (repère orthonormé, unité : 5 cm).
   (Cette courbe admet un point d'inflexion qu'on ne cherchera pas à déterminer).

2. a. Montrer que l'image par f du segment $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ est le segment $\left[0 ; \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.

   b. On définit la fonction φ : $\left[0 ; \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \left[0 ; \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$

   $$x \longmapsto 2\sqrt{x}\,e^{-x}.$$

   Démontrer que φ admet une fonction *réciproque continue*, que l'on notera g.

   c. Dresser le tableau des variations de g.

   d. Démontrer que g est dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $\left]0 ; \sqrt{\frac{2}{e}}\right[$.

   e. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? en $\sqrt{\frac{2}{e}}$?

3. a. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que l'équation d'inconnue x :

   $$\varphi(x) = \frac{1}{n}$$

   admet une solution unique dans le segment $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$. On note a_n cette solution.

   b. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

   c. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ converge vers 0.

EXERCICE 3

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.

La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à 0,1.

On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :

N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés ;
X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés ;
Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état.

On a donc : $X + Y = N$.

1. Soit n un entier naturel ; calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité conditionnelle suivante :
   $P_{(N=n)}(X = k)$.

2. Donner la loi du couple (X, N), puis montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre 0,5.

3. Déterminer la loi de Y.

4. a. Si i et j sont deux entiers naturels, calculer la probabilité : $P\big((X = i) \cap (Y = j)\big)$.

   b. X et Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 4

ln désigne le logarithme népérien et e désigne la base des logarithmes népériens.

On pose, pour tout entier naturel non nul n,

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx \,, \text{ et } I_0 = e - 1 .$$

1. a. Établir, pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e - (n+1)\, I_n$.

   b. Montrer, pour tout entier naturel n : $I_n \geq 0$.

   c. Déduire des questions a. et b. que, pour tout entier naturel n :

   $$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} .$$

   d. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

   e. Montrer : $I_n \sim \dfrac{e}{n}$.

2. Soit a un réel différent de I_0 ; on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall\, n \in \mathbb{N} \,, \; u_{n+1} = e - (n+1) u_n . \end{cases}$$

Montrer : $|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

(On pourra considérer la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $D_n = |u_n - I_n|$).