École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1994

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Lundi 9 mai 1994 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées :

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

PROBLÈME 1

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E : $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

On définit les polynômes suivants :

$$P_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)$$

$$P_1(X) = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3)$$

$$P_2(X) = -\frac{1}{2}X(X-1)(X-3)$$

$$P_3(X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2).$$

1. a. Pour tous entiers i et j entre 0 et 3, calculer $P_i(j)$.

   b. Démontrer que la famille $\mathcal{C} = \big(P_0(X), P_1(X), P_2(X), P_3(X)\big)$ est une base de E.

   c. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. On note M cette matrice.

   d. Calculer M^{-1} par la méthode du pivot de Gauss : le détail des calculs devra figurer sur la copie.

2. On définit le polynôme :
$P(X) = X(X-1)(X-2)(X-3)$.

On note φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme $T(X)$, associe le reste $\widehat{T(X)}$ de la division suivant les puissances décroissantes de $T(X)$ par $P(X)$.

a. Démontrer que φ est linéaire.

b. Démontrer que, pour tout polynôme $T(X)$:

$$\widehat{T(X)} = T(0)\,P_0(X) + T(1)\,P_1(X) + T(2)\,P_2(X) + T(3)\,P_3(X).$$

c. En utilisant la formule vue en b., déterminer les composantes des polynômes 1, X, X^2, X^3 dans la base $\mathscr{C}$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

3. Soit $S(X)$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
On désigne par ψ l'application qui, à tout polynôme $Q(X)$ de E, associe $\widehat{Q(X)S(X)}$.

a. Démontrer que ψ est un endomorphisme de E.

b. Calculer $\psi(P_0(X))$, $\psi(P_1(X))$, $\psi(P_2(X))$, $\psi(P_3(X))$.
Est-ce que ψ est diagonalisable ?

c. On se place ici dans le cas particulier : $S(X) = 2X^3 + X^2 - 3X + 1$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de ψ.

PROBLÈME 2

PREMIÈRE PARTIE

On note
$$f_0 : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^{-x^2}$$

et, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 1$,

$$f_n : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^n e^{-x^2}.$$

1. a. Étudier, pour tout entier naturel n, la continuité et la dérivabilité de f_n.

b. Dresser le tableau des variations de f_0, et celui de f_n pour tout entier naturel non nul n.

c. Pour tout x de $[0 ; +\infty[$ et tout entier naturel n, comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ (on distinguera les cas $0 \leq x \leq 1$ et $x > 1$).

d. On note C_n la courbe représentative de f_n. Tracer sur un même schéma C_0, C_1, C_4 (repère orthonormé, unité 10 cm). On ne cherchera pas à déterminer d'éventuels points d'inflexion.

2. (Les résultats de cette question 2. ne seront pas utilisés dans la suite du problème).

a. Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 1 - x$, d'inconnue $x \in [0 ; 1]$, admet une solution et une seule, qu'on notera x_n.

b. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge vers 1.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge. On note, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

c. En déduire la valeur de I_n pour tout entier naturel n (on distinguera deux cas suivant la parité de n et on donnera le résultat à l'aide de factorielles ; on rappelle : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$).

4. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel a, la convergence des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\cos(ax)\,dx, \quad \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\sin(ax)\,dx.$$

DEUXIÈME PARTIE

On note F et G les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout réel a, par :

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(ax)\,dx, \quad G(a) = \int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\sin(ax)\,dx$$

(ces intégrales généralisées convergent d'après la question 4. de la première partie).

1. Démontrer : $\forall a \in \mathbb{R},\ G(a) = \dfrac{1}{2} a\,F(a)$.

2. a. Soient $a \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R},\ x \in [0\,;+\infty[$.

Montrer :

- $\cos\big((a+h)x\big) = \cos(ax) - hx\sin(ax) - x^2 \int_a^{a+h} (a+h-u)\cos(xu)\,du$
- $\left| \int_a^{a+h} (a+h-u)\cos(xu)\,du \right| \leq \dfrac{h^2}{2}$.

b. En déduire, pour tout nombre réel a et tout nombre réel non nul h :

$$\left| \frac{F(a+h)-F(a)}{h} + G(a) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx.$$

c. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$\forall a \in \mathbb{R}, \quad F'(a) = -G(a)$.

3. Calculer, en fonction du réel a, $F(a)$ et $G(a)$.

(On pourra considérer l'application H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(a) = e^{\frac{a^2}{4}} F(a)$).