



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT  
Direction des Admissions et Concours  
-----

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON  
-----

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES  
-----

**MATHEMATIQUES II**  
OPTION GENERALE

**mardi 17 mai 1994, de 8 h à 12 h**  
-----

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Sont autorisées :**

- Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

---

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de test de prélèvements sanguins dite du pooling ; elle est présentée dans la partie II, où on l'étudie d'un point de vue probabiliste. Dans tout le problème,  $a$  désigne un nombre réel strictement positif. Dans la partie I, on étudie, à titre préliminaire, la fonction  $f_a$  définie sur  $]0, +\infty[$  par la relation :

$$f_a(x) = \frac{1}{x} - e^{-ax}$$

**PARTIE I. Étude de  $f_a$**

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par la relation :

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

On considère l'équation  $(E_a) : g(x) = a$  (où l'inconnue  $x$  appartient à  $]0, +\infty[$ ).

a) Étudier la variation de la fonction  $g$ . (On dressera le tableau de variation et on tracera la représentation graphique de  $g$ .)

b) On suppose que :  $0 < a < \frac{1}{e}$ .

Montrer que  $(E_a)$  admet exactement deux solutions ; on les note  $u(a)$  et  $v(a)$ , en convenant que  $u(a) < v(a)$ .

Établir que :  $1 < u(a) < e < v(a)$ .

c) Discuter suivant les valeurs de  $a$  le nombre de solutions de  $(E_a)$ .

2. Soit  $h_a$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par la relation :

$$h_a(x) = 2 \ln x + \ln a - ax$$

On considère l'équation  $(F_a) : h_a(x) = 0$  (où l'inconnue  $x$  appartient à  $]0, +\infty[$ ).

a) Étudier la variation de la fonction  $h_a$ . (On ne demande pas la représentation graphique de  $h_a$ .)

b) On suppose que :  $0 < a < \frac{4}{e^2}$ .

Montrer que  $(F_a)$  admet exactement deux solutions ; on les note  $r(a)$  et  $s(a)$ , en convenant que  $r(a) < s(a)$ .

Établir que :  $0 < r(a) < \frac{2}{a} < s(a)$ .

c) Discuter suivant les valeurs de  $a$  le nombre de solutions de  $(F_a)$ .

3. Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $0 < a < b$  et  $x$  élément de  $]0, +\infty[$ . Montrer que :

$$\frac{1}{x} - 1 < f_a(x) < f_b(x) < \frac{1}{x}$$

4. Comportement asymptotique de  $f_a$

a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x)$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x)$ .

5. Signe de  $f_a$

a) Comparer les signes de  $f_a(x)$  et de  $a - g(x)$ .

b) En déduire le tableau de signes de  $f_a(x)$  lorsque  $x$  décrit  $]0, +\infty[$ ,  $a$  étant fixé. (On sera amené à distinguer trois cas suivant la position de  $a$  par rapport à  $1/e$ .)

6. Variation de  $f_a$

a) Comparer les signes de  $f'_a(x)$  et de  $h_a(x)$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f_a$ . On distinguera deux cas :

$$a \geq \frac{4}{e^2} \quad \text{et} \quad 0 < a < \frac{4}{e^2}$$

Dans ce dernier cas, on ne cherchera pas à préciser les valeurs de  $f_a(r(a))$  et de  $f_a(s(a))$ .

7. On suppose dans cette question que  $0 < a < \frac{1}{e}$ .

a) Établir que  $u(a) < r(a) < v(a) < s(a)$  et que  $f_a$  présente un minimum en  $r(a)$ .

b) Donner l'allure du graphe de  $f_a$ .

8. On suppose encore que  $0 < a < \frac{1}{e}$ .

On pose  $m(a) = f_a(r(a))$ .

a) Établir que :  $r(a) = \frac{e^{ar(a)/2}}{\sqrt{a}}$ .

b) Déterminer  $\lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{a} r(a)$ .

On pourra écrire :  $ar(a) = \sqrt{a} e^{ar(a)/2}$  ; on utilisera alors la question 2. b) pour obtenir la limite de  $ar(a)$  lorsque  $a$  tend vers 0.

c) Déterminer  $\lim_{a \rightarrow 0} m(a)$ .

d) Calculer un équivalent simple de  $m(a) + 1$  lorsque  $a$  tend vers 0.

## PARTIE II. Étude du poolage

On étudie dans cette partie une méthode de détection des porteurs d'un parasite au sein d'un ensemble donné de  $N$  individus tirés au sort de façons indépendantes dans une population très vaste par rapport à  $N$ . La proportion de porteurs du parasite dans la population est  $p$  ( $0 < p < 1$ ).

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite, le résultat de ce test étant dit positif dans le premier cas et négatif dans le second.

Pour chacun des  $N$  individus, on possède un prélèvement sanguin. On envisage alors deux méthodes de détection.

*Première méthode* : on teste un à un les  $N$  prélèvements, effectuant ainsi  $N$  tests.

*Seconde méthode* (poolage) : on fixe un entier naturel non nul  $l$ . On suppose que  $N$  est un multiple de  $l$  et on pose  $N = nl$ . On répartit les  $N$  prélèvements en  $n$  groupes  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , chaque groupe  $G_i$  contenant  $l$  prélèvements. Pour chacun des groupes  $G_i$ , on extrait une quantité de sang de chacun des  $l$  prélèvements qu'il contient, puis on mélange ces extraits, obtenant ainsi un échantillon de sang  $H_i$ , caractéristique du groupe  $G_i$ .

On teste alors  $H_i$  :

— si le test de  $H_i$  est négatif, aucun des individus au sein du groupe  $G_i$  n'est porteur du parasite. Le travail sur le groupe  $G_i$  est alors terminé ;

— si le test de  $H_i$  est positif, on teste un à un les prélèvements de  $G_i$  pour détecter les porteurs du parasite au sein du groupe  $G_i$ .

Soient  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de groupes  $G_i$  pour lesquels le test de  $H_i$  a été positif et  $T$  la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans la réalisation de la méthode du poolage.

1. a) Exprimer  $T$  à l'aide de  $n, l$  et  $X$ .

b) Pour tout nombre entier naturel  $i$  compris entre 1 et  $n$ , calculer la probabilité de l'événement : « le test de  $H_i$  est négatif ».

c) Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de  $X$ .

On pose désormais et pour toute la fin du problème :  $a = -\ln(1-p)$ .

d) Montrer que  $E(T) = N(1 + f_a(l))$ .

On suppose en outre, dans toute la fin du problème, que :  $0 < p < 1 - \frac{1}{3^{1/3}}$ .

2. a) Montrer que  $f_a(3) < 0$ . Comparer les deux méthodes pour  $l = 3$ .

b) Établir que :  $a < \frac{1}{e}$ .

On cherche maintenant à optimiser la méthode du poolage, c'est-à-dire choisir, en fonction de  $p$ , la valeur de  $l$  qui minimise  $E(T)$ .

3. Soit  $l$  un nombre entier naturel non nul. On dit que  $l$  vérifie la propriété (MIN) si, pour tout nombre entier naturel non nul  $l'$ ,  $f_a(l) \leq f_a(l')$ .

a) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel non nul  $l$  qui vérifie la propriété (MIN) et qu'un tel entier est égal soit à  $[r(a)]$ , soit à  $[r(a)] + 1$ , où  $[r(a)]$  désigne la partie entière de  $r(a)$ .

On note désormais  $l_0$  le plus petit des entiers naturels non nuls  $l$  qui vérifient la propriété (MIN).

b) Montrer que  $f_a(l_0) < 0$ . En déduire que  $l_0 \geq 2$ .

c) Montrer que  $f_a(3) < f_a(2)$ . Que peut-on en déduire pour  $l_0$  ?

4. Proposer un algorithme, qu'on pourra écrire en TURBO-PASCAL, qui prend  $p$  en donnée et fournit la valeur de  $l_0$ .

5. Exemple : on suppose  $p = 0,01$ .

a) Déterminer la valeur de  $l_0$ .

b) Déterminer le rapport  $\frac{E(T)}{N}$  lorsque  $l = l_0$ .

6. On note  $\rho(p)$  la valeur du rapport  $\frac{E(T)}{N}$  lorsque  $l = l_0$ .

a) Donner un équivalent de  $l_0$  lorsque  $p$  tend vers 0.

b) Donner un équivalent de  $\rho(p)$  lorsque  $p$  tend vers 0.

c) Le résultat du 5. b) est-il conforme à celui de 6. b) ?