# ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1994

**Option générale**

**MATHEMATIQUES 2**

*Vendredi 13 mai 1994 de 14h à 18h*

*Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.*

Le problème a pour objet l'étude d'une marche aléatoire sur un cube (partie II).
Dans la partie I, on établit quelques résultats matriciels utilisés dans la suite.

## PARTIE I

1°) Etude de suites récurrentes linéaires.

a) On considère l'ensemble S des suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant pour tout entier $n \geq 1$:

(1) $\quad 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0.$

Etablir que S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

b) Résoudre l'équation $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.

c) Déterminer les suites géométriques non nulles $(r^n)_{n\geq 1}$ appartenant à S.

d) On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ appartenant à S.

- Exprimer en fonction de $u_1$, $u_2$, $u_3$ trois nombres réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha + \dfrac{\sqrt{7}}{3}\beta - \dfrac{\sqrt{7}}{3}\gamma. \\ u_2 = \alpha + \dfrac{7}{9}\beta + \dfrac{7}{9}\gamma. \\ u_3 = \alpha + \dfrac{7\sqrt{7}}{27}\beta - \dfrac{7\sqrt{7}}{27}\gamma. \end{cases}$$

*(On formera $9u_3 - 7u_1$. On donnera les expressions exactes de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$).*

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat
affilié à la Chambre de Commerce et d'Industrie de Versailles - Val d'Oise-Yvelines ;
membre de la Fesic

- On associe à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$v_n = u_n - \alpha - \beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n - \gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n.$$

Etablir qu'elle appartient à S, et en déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = 0$. Exprimer enfin $u_n$ en fonction de n.

e) En déduire que les trois suites obtenues ci-dessus au (c) forment une base de l'espace vectoriel S.

2°) Etude des puissances d'une matrice.

On étudie la suite des puissances d'une matrice réelle d'ordre 4 notée M et satisfaisant les deux conditions suivantes:

(2) $9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0$.

(3) Les matrices $M$, $M^2$, $M^3$ sont linéairement indépendantes.

a) On se propose d'établir, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'existence et l'unicité de trois nombres réels $a_n$, $b_n$, $c_n$ tels que:

(4) $M^n = a_n M + b_n M^2 + c_n M^3$.

- Etablir, pour tout entier $n \geq 1$, l'unicité des réels $a_n$, $b_n$, $c_n$ (s'ils existent).
- Déterminer $a_n$, $b_n$, $c_n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.
- Etablir par récurrence l'existence de $a_n$, $b_n$, $c_n$ dans le cas général.

*(On explicitera $a_{n+1}$, $b_{n+1}$, $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$, $c_n$).*

b) Vérifier par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a: $a_n + b_n + c_n = 1$.

c) En multipliant par $M^{n-1}$ la relation (2), établir que les suites $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ vérifient la relation (1).

d) En appliquant à la suite $(b_n)$ les résultats obtenus à la question 1°, établir pour tout entier $n \geq 1$ la formule suivante:

$$b_n = \frac{9}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right].$$

Déterminer de même les expressions de $a_n$ et $c_n$.

3°) Etude d'un cas particulier.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4)$, et l'on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par:

$$f(e_1) = e_2 \quad ; \quad f(e_2) = \frac{e_1}{3} + \frac{2e_3}{3} \quad ; \quad f(e_3) = \frac{2e_2}{3} + \frac{e_4}{3} \quad ; \quad f(e_4) = e_4 .$$

a) Ecrire la matrice A de f dans la base $(e_1, e_2, e_3, e_4)$, calculer $A^2$, $A^3$, $A^4$, puis prouver que la matrice A satisfait aux conditions (2) et (3). Ainsi donc:

$$A^n = a_n A + b_n A^2 + c_n A^3 \quad (n \geq 1).$$

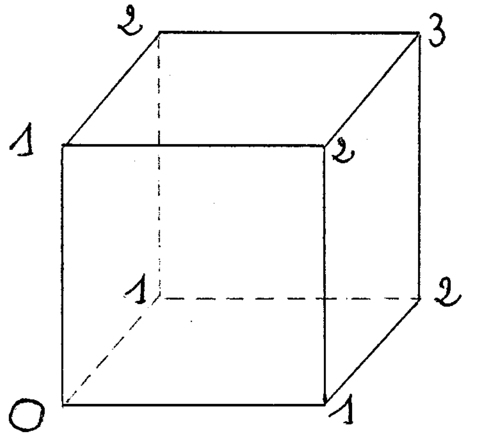
b) Ecrire la matrice B de f dans la base $(e_4, e_3, e_2, e_1)$ et montrer que:

$$B^n = a_n B + b_n B^2 + c_n B^3 \quad (n \geq 1).$$

***

## PARTIE II

On considère un cube, dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 selon qu'ils sont situés à une, deux, trois arêtes du sommet O:




**A]** On considère dans cette partie le mouvement d'un point P, situé au sommet O du cube à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets du cube selon les deux règles suivantes:

A1) lorsque le point P atteint à l'instant n un sommet S du cube autre que le sommet 3, il se situe à l'instant n+1, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.
A2) lorsque le point P atteint le sommet 3 du cube, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n, on désigne par:
- $X_n$ la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n (en particulier, on a $X_o = 0$).
- T la variable aléatoire indiquant, s'il existe, l'instant (nécessairement impair et supérieur ou égal à 3) où, pour la première fois, le point atteint le sommet 3.

1°) Lois des variables aléatoires $X_n$.
Pour tout entier naturel n, on note $U_n$ le vecteur-colonne dont les composantes sont (de haut en bas) les probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
a) Expliciter $U_o$, $U_1$, $U_2$.
b) Exprimer pour i = 0, 1, 2, 3 la probabilité $P(X_{n+1} = i)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
En déduire une matrice M, d'ordre 4, telle que, pour tout entier $n \geq 0$:

$$U_{n+1} = MU_n.$$

c) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $U_n$ en fonction de $M^n$ et $U_o$, et en déduire l'expression du vecteur $U_n$ et de la loi de $X_n$ en fonction des réels $a_n$, $b_n$, $c_n$ définis à la partie I.

2°) Loi de la variable aléatoire T.
a) Comparer les événements " $X_{2n} = 2$ et $X_{2n+1} = 3$" et "$T = 2n+1$".
En déduire la probabilité de l'événement "$T = 2n+1$".
b) Vérifier alors que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = 2n+1) \quad = \quad 1.$$

c) Calculer enfin l'espérance de la variable aléatoire T.

**B]** On considère dans cette partie le mouvement d'un point P, situé au sommet O du cube à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets du cube selon les deux règles suivantes:

B1) le point P est à l'instant 1 sur l'un des trois sommets du cube reliés à O par une arête puis, lorsqu'il atteint à l'instant $n \geq 1$ un sommet S du cube autre que le sommet 0, il se situe à l'instant n+1, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.
B2) lorsque le point P revient au sommet O du cube, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n, on désigne par:
- $Y_n$ la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n (en particulier, on a $Y_1 = 1$).
- R la variable aléatoire indiquant, s'il existe, l'instant (nécessairement pair et supérieur ou égal à 2) où, pour la première fois, le point revient au sommet O.

1°) Lois des variables aléatoires $Y_n$.
Pour tout entier naturel n, on note $V_n$ le vecteur-colonne dont les composantes sont (de haut en bas) les probabilités $P(Y_n = 0)$, $P(Y_n = 1)$, $P(Y_n = 2)$, $P(Y_n = 3)$.
a) Déterminer une matrice M, d'ordre 4, telle que l'on ait pour tout entier $n \geq 1$:

$$V_{n+1} = MV_n.$$

b) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $V_n$ en fonction de $M^{n-1}$ et $V_1$, et en déduire l'expression du vecteur $V_n$ et de la loi de $Y_n$ en fonction des réels $a_{n-1}$, $b_{n-1}$, $c_{n-1}$ définis à la partie I.... pour $n \geq 2$ (alors gégé !)

2°) Loi de la variable aléatoire R.
a) Comparer pour $n \geq 1$ les événements " $Y_{2n-1} = 1$ et $Y_{2n} = 0$" et "R = 2n".
En déduire la probabilité de l'événement "R = 2n".
b) Vérifier alors que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(R = 2n) = 1.$$

c) Calculer enfin l'espérance de la variable aléatoire R.

***