

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

MATHÉMATIQUES

Année 1995

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Exercice 1

Dans cet exercice:

E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

$\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E , associe le polynôme Q défini par:

$$Q(X) = (2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X)$$

1 - Montrer que f est un endomorphisme de E .

2 - Soit B un vecteur propre pour f c'est-à-dire un élément non nul de E tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation $f(B) = \lambda B$.

a. Montrer que B est nécessairement de degré 2.

b. On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que -1 est racine de B .

Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1 ; il existe donc un polynôme A tel que:

$$B(X) = (X + 1)^k A(X) \quad \text{avec } A(-1) \neq 0$$

Montrer que $k = 2$ et que A est constant.

En déduire que $\lambda = 3$ est une valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

c. En supposant $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1.

En déduire que $\lambda = -1$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

d. On suppose maintenant que $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$.

Montrer que -1 et 1 sont des racines de B .

En déduire une factorisation des polynômes B obtenus, ainsi que la valeur propre associée à B .

3 - Etude d'un cas particulier. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et g la restriction de f à F . On désigne par $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de F .

a. Montrer que g est un endomorphisme de F .

b. Ecrire la matrice A de g relativement à la base \mathcal{B} .

c. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice P de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P D^n P^{-1}$$

d. Expliciter A^n en fonction de n .

Exercice 2

On désigne par x un réel tel que $x > 1$ et l'on se propose d'étudier la série de terme général $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ pour $n \geq 1$.

Lorsque la série converge, sa somme est notée: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1 - Etude de la dérivabilité de f .

a. Justifier la convergence de la série définissant f .

b. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n \frac{x+1}{2} \ln^2(n) u_n(x)$.

En déduire la convergence de la série de terme général $\ln^2(n) u_n(x)$ et à fortiori la convergence de la série $\ln(n) u_n(x)$.

- c. Pour $x > 1$ et pour tout réel h tel que $abh \leq \frac{x-1}{2}$ montrer en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange que

$$|u_n(x+h) - u_n(x) + h \ln(n)u_n(x)| \leq \frac{h^2}{2} u_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \ln^2(n)$$

puis que

$$\left| f(x+h) - f(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)u_n(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2(n)u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

- d. En déduire que f est dérivable sur $]1, +\infty[$, donne une expression de la dérivée de f sous la forme de la somme d'une série.

2 - Représentation de f

- a. Pour $x > 1$ et pour k entier naturel non nul, vérifier que l'on a l'encadrement suivant:

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

et que pour tout entier $N > 1$:

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^x}$$

- b. Prouver alors que $1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$
 c. Préciser les limites de f quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, et quand x tend vers $+\infty$.
 d. Déduire des questions précédentes les variations de f et donner l'allure de sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 4cm. On admettra que $f(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $f(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Problème

On dispose de deux urnes A et B contenant respectivement a et b boules (a et b sont deux entiers naturels non nuls).

On procède alors à l'expérience suivante: on choisit une des urnes pour en extraire une boule que l'on met dans l'autre urne en admettant que la probabilité de choisir l'urne A est q et que la probabilité de choisir B est p avec $p+q=1$ et $p \in]0,1[$.

On répète cette épreuve jusqu'à ce que l'une des urnes soit vide, si cela se produit, ou bien indéfiniment. On pose $x = \frac{q}{p}$.

1 - Etude d'une suite récurrente.

On considère la suite U définie par la relation de récurrence suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times :: U_n = pU_{n+1} + qU_{n-1}$$

U_0 et U_{a+b} étant des réels donnés.

- a. Prouver que l'on a pour tout n de \mathbb{N}^\times : $p(U_{n+1} - U_n) = q(U_n - U_{n-1})$.
 b. Lorsque $p = q$, montrer que la suite U est une suite arithmétique.
 En déduire U_n en fonction de n, a, b, U_0 et U_{a+b} .
 c. Lorsque p est différent de q , montrer qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, : U_n = \lambda + \mu x^n$$

Déterminer U_n en fonction de n, a, b, U_0 et U_{a+b} .

2 - Etude de la probabilité de voir l'expérience se terminer

Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq a + b$.

On note E_k l'événement: à partir d'un contenu de k boules dans l'urne A , l'expérience s'arrête parce que l'urne A est vide.

Ainsi $P(E_0) = 1$ et $P(E_{a+b}) = 0$.

Et enfin, on note A l'événement: le premier tirage se fait dans A .

- a. Pour k un entier tel que $1 \leq k \leq a + b - 1$, établir une relation entre $P(E_k)$, $P(E_{k+1})$ et $P(E_{k-1})$.
- b.
 - i. En utilisant les résultats de la partie 1, calculer la probabilité $P(E_a)$ de voir l'expérience se terminer par le vidage de A .
 - ii. Calculer la limite de $P(E_a)$ lorsque b tend vers $+\infty$.
 - iii. Pour p différent de q , déterminer la limite de $P(E_a)$ lorsque p tend vers $0,5$.
- c. Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne B ?
- d. Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer?

3 - Etude du nombre moyen de tirages effectués pour voir l'expérience se terminer.

Pour k un entier tel que $0 \leq k \leq a + b$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de tirages qu'il faut effectuer pour vider l'une quelconque des urnes A ou B à partir d'un contenu initial de k boules dans l'urne A . Si l'expérience est sans fin, on pose $X_k = -1$, et alors d'après la question 2d, on sait que $P(X_k = -1) = 0$. On admet que X_k admet une espérance que l'on note $E(X_k)$.

Ainsi $E(X_0) = 0$ et $E(X_{a+b}) = 0$.

- a. Pour j un entier naturel non nul et $1 \leq k \leq a + b - 1$, montrer que:

$$P(X_k = j) = qP(X_{k-1} = j - 1) + pP(X_{k+1} = j - 1)$$

En déduire que $E(X_k) = 1 + qE(X_{k-1}) + pE(X_{k+1})$.

- b. Pour $p = q$:
 - i. Montrer l'existence d'un réel α tel que la variable $Y_k = X_k + \alpha k^2$ ait une espérance qui vérifie:

$$\forall k \geq 1 : E(Y_k) = \frac{1}{2}E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}E(Y_{k-1})$$

- ii. En utilisant la partie 1 montrer que $E(X_a) = ab$.

- c. Pour p différent de q .

- i. Montrer l'existence d'un réel β tel que la variable $Z_k = X_k + \beta k$ ait une espérance qui vérifie:

$$\forall k \geq 1 : E(Z_k) = pE(Z_{k+1}) + qE(Z_{k-1})$$

- ii. En utilisant la partie 1 montrer que $E(X_a) = \frac{1}{p - q} \left(\frac{(a + b)(x^a - 1)}{x^{a+b} - 1} - a \right)$.

- iii. Quelle est la limite de $E(X_a)$ quand b tend vers $+\infty$ dans le cas $p < q$?