

EXERCICE 1

n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

On considère la fonction f_n définie, pour tout x réel, par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

- 1 Etudier les variations de f_n .
- 2 En déduire que, pour tout n entier supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$
- 3 Montrer que : $u_n \leq \frac{1}{n}$; en conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.
- 4 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ et en déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
- 5 Déterminer un équivalent simple de $\frac{1}{n} - u_n$ lorsque n est au voisinage de l'infini.

EXERCICE 2

Une urne contient 8 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes.

Un joueur effectue dans cette urne des tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée avant de tirer la suivante, jusqu'à ce qu'il obtienne :

Soit une boule rouge, auquel cas il a gagné et le jeu s'arrête

Soit une boule verte, auquel cas il a perdu et le jeu s'arrête également.

On désigne par n un entier naturel non nul.

On note A_n l'évènement : « Le joueur est déclaré vainqueur à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage. »

- 1a Calculer $p(A_n)$.
- 1b Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
- 2 Quelle est la probabilité que le joueur perde ?
- 3 Quelle est la probabilité que ce jeu ne s'arrête jamais ?
- 4 On note X la variable aléatoire égale au nombre minimal de tirages nécessaires à l'arrêt du jeu. Reconnaître la loi de X et donner son espérance.

Le joueur paye un franc le droit d'effectuer un tirage, il gagne a francs en cas de victoire et paye 33 francs en cas de défaite.

On note Y la variable aléatoire qui vaut a en cas de victoire et (-33) en cas de défaite.

On appelle G le gain (positif ou négatif) du joueur à la fin du jeu.

5a Exprimer G en fonction de X et Y .

5b Calculer $E(G)$ et en déduire la valeur de a pour laquelle ce jeu est équitable.

EXERCICE 3

Partie I

- 1 Montrer que , pour tout réel x strictement positif : $\ln(x) \leq x - 1$
- 2 Soient x_1, x_2, \dots, x_n n réels strictement positifs . (n désignant un entier naturel non nul)

En appliquant l'inégalité précédente à chacun des nombres $a_i = \frac{x_i}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k}$, et en sommant ces n inégalités

$$\text{montrer que : } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln x_k \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \quad (*)$$

Partie II

- 1 Etudier la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$

On précisera les limites de g aux bornes de l'ensemble d'étude .

- 2 En déduire le signe de $g(x)$ ainsi que le sens de variation de la fonction f définie pour tout x strictement positif par : $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

On pose , pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$

3a Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3b Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante .

3c En déduire que , pour tout entier naturel n non nul : $v_n \leq u_n \leq e$.

4a Montrer par récurrence sur n que , pour tout n entier supérieur ou égal à 1 :

$$\sum_{k=1}^n k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \geq \int_1^n x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

4b En appliquant l'inégalité (*), avec $x_k = u_k$, montrer que : $\frac{1}{n} \int_1^n x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \leq \ln(v_n) \leq 1$

4c Calculer $\int_1^n x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ puis en déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e .

PROBLEME

p désigne un réel élément de $]0, 1[$, on pose : $q = 1-p$.

Un mobile se déplace sur un axe d'origine O ; à chaque instant , il est soit en O , soit en A d'abscisse 1 , soit en B d'abscisse -1 .

Si à un instant donné , il est en O , à l'instant suivant il sera en A avec la probabilité p , ou en B avec la probabilité q .

Si à un instant donné , il est en A ou en B , à l'instant suivant il sera à coup sûr en O .

Pour tout entier naturel n , on appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce mobile à l'instant n . On suppose que $X_0 = 0$. (le «voyage» du mobile commence en O .)

1 Donner les lois de X_1 et X_2 .

2a Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{-1, 0, 1\}$, calculer : $P(X_{n+1} = i / X_n = j)$

2b En déduire que : $P(X_{n+1} = -1) = q \cdot P(X_n = 0)$

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = -1) + P(X_n = 1)$$

$$P(X_{n+1} = 1) = p \cdot P(X_n = 0)$$

$$\text{On pose : } U_n = \begin{bmatrix} P(X_n = -1) \\ P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{bmatrix}$$

3a Justifier que : $U_{n+1} = M \cdot U_n$ où M est une matrice carrée réelle d'ordre 3 que l'on précisera.

3b Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de M , avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

3c Pour tout k élément de $\{1, 2, 3\}$, trouver un vecteur colonne propre de M associé à la valeur propre λ_k , dont la première composante soit positive et la deuxième égale à λ_k .

$$\text{On considère la matrice } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

4a Montrer qu'il existe une matrice Q inversible telle que : $D = Q^{-1}MQ$.

4b En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n : $M^n = Q \cdot D^n \cdot Q^{-1}$.

5a Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$P(X_n = -1) = q \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

$$P(X_n = 0) = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

$$P(X_n = 1) = p \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

5b Calculer $P(X_{2n} = 0)$: Aurait-on pu prévoir ce résultat ?

6a Calculer les espérances des variables X_{2n} et X_{2n+1} .

6b Calculer leurs variances : $V(X_{2n})$ et $V(X_{2n+1})$ puis déterminer la valeur de p pour laquelle $V(X_{2n+1})$ est maximale.