Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1995

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Vendredi 12 mai 1995 de 8 heures à 12 heures

<u>Sont autorisées :</u>

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

PROBLÈME 1

Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On définit la matrice $A_n = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, carrée d'ordre n à coefficients réels, de la manière suivante :

$$
\begin{array}{ll}
\text{si } 1 \leq i \leq n-1 & : a_{i,i+1} = i \ ; \\
\text{si } 2 \leq i \leq n & : a_{i,i-1} = n+1-i \ ; \\
\text{si } j \neq i-1 \text{ et } j \neq i+1 & : a_{i,j} = 0 .
\end{array}
$$

Ainsi : $$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & . & & & . \\ 0 & n-2 & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & . & . & 0 \\ . & & & . & . & . & n-1 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, n = 3 : $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de A_3.
b. La matrice A_3 est-elle diagonalisable ?
c. La matrice A_3 est-elle inversible ?

2. Dans toute la suite du problème, E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E :

$$\mathscr{B} = (1, X, ..., X^{n-1}).$$

On note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A_n.
a. Calculer $u(1)$, $u(X^{n-1})$, et, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n-2$, $u(X^j)$.
b. Démontrer que, pour tout élément $P(X)$ de E :

$$u\big(P(X)\big) = (n-1)\,X\,P(X) - (X^2-1)\,P'(X)$$

(où $P'(X)$ désigne la dérivée de $P(X)$).

3. Dans cette question, λ désigne un nombre réel. On suppose que λ est valeur propre de l'endomorphisme u, et on considère un vecteur propre $P(X)$ associé à cette valeur propre.
a. On suppose : $\lambda \neq n-1$. Montrer que 1 est racine de $P(X)$.
b. On suppose : $\lambda \neq 1-n$. Montrer que -1 est racine de $P(X)$.
c. On suppose : $\lambda = n-1$.
Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et un entier naturel non nul s tels que :

$$P(X) = (X+1)^s\,T(X) \quad \text{et} \quad T(-1) \neq 0.$$

Montrer que : $s = n-1$.
Montrer que $T(X)$ est un polynôme constant et non nul.
d. On suppose : $\lambda = 1-n$.
Montrer qu'il existe un réel non nul a tel que :

$$P(X) = a(X-1)^{n-1}.$$

e. On suppose : $\lambda \neq 1-n$ et $\lambda \neq n-1$.
Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et deux entiers naturels non nuls r et s tels que :

$$P(X) = (X-1)^r(X+1)^s\,T(X) \quad \text{et} \quad T(-1) \neq 0 \quad \text{et} \quad T(1) \neq 0.$$

Montrer que : $1 \leq r \leq n-2$,
$s = n-1-r$,
$\lambda = n-1-2r$.
Montrer que $T(X)$ est constant et non nul.

4. a. Pour tout entier naturel r tel que $0 \leq r \leq n-1$, calculer $u\left[(X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right]$.
b. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
Démontrer que $\mathscr{C} = \left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right)_{0 \leq r \leq n-1}$ est une base de E.

5. La matrice A_n est-elle inversible ?

PROBLÈME 2

Le but du problème est l'étude de l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(0) = 1$ et, pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

On note $r : \left]-1\,;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}$$

1. Étude globale de F sur IR*

a. Montrer : $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\,,\ 0 \leq F(x) \leq 1$.

b. En utilisant le changement de variable $y = -t$, étudier la parité de F .

c. Montrer que F est de classe C^1 sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et que :
$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ x\,F'(x) = -F(x) + r(x^4)$.

d. Montrer : $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ \ r(x^4) \leq F(x)$, et en déduire que F est décroissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

2. Étude locale de F en 0

a. Montrer que F est continue en 0 .

b. α. Établir :

$$\forall u \in \left[0\,;+\infty\right[,\ \ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{1}{2}u\right) \leq \frac{3}{8}u^2 .$$

β. En déduire que F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 , et déterminer celui-ci.

γ. Montrer que F est dérivable en 0 , et calculer $F'(0)$.

c. Établir que F' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 , et déterminer celui-ci.

d. Établir que F est de classe C^1 sur IR .

3. Étude locale de F en $+\infty$

a. α. On note $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

En utilisant le changement de variable $z = \dfrac{1}{t}$, former une relation entre $h(x)$ et $h\left(\dfrac{1}{x}\right)$, pour $x \in \left]0\,;+\infty\right[$.

β. En déduire : $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ \ x\,F(x) + \dfrac{1}{x}\,F\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2F(1)$.

b. α. En déduire : $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

β. Montrer : $F'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Tracer la courbe représentative de F (on n'étudiera ni la concavité, ni les points d'inflexion, et on admettra que F(1) admet 0,93 comme valeur approchée à 10^{-2} près).