

MATHEMATIQUES I

OPTION GENERALE

EXERCICE 1 (4 points)

Pour n entier naturel, on désigne par E_n l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} vérifiant : $\sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} = 0$ (fonction nulle), où $f^{(0)} = f$ et où, pour $k \geq 1$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f , le coefficient binomial C_n^k ayant sa signification habituelle.

1°) Montrer que pour tout n entier naturel, E_n est un espace vectoriel.

2°) Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} . On désigne par g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x \cdot f(x)$.

a) Montrer que : $f \in E_n \Leftrightarrow g^{(n)} = 0$.

b) Pour $n > 0$ et k entier tel que $0 \leq k < n$, on désigne par f_k la fonction définie par $f_k(x) = x^k e^{-x}$. Prouver que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ est une base de E_n .

3°) Dans cette question, $n = 4$ et B désigne la base (f_0, f_1, f_2, f_3) de E_4 .

a) Montrer que l'application ϕ définie sur E_4 et qui, à toute fonction f associe la fonction $h = \phi(f)$ définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = x \cdot f(x) + x \cdot f'(x) - f''(x)$, est un endomorphisme de E_4 .

b) Déterminer la matrice A de ϕ relativement à B . Déterminer les valeurs propres et les vecteurs colonnes propres de A . ϕ est-elle surjective ?

EXERCICE 2 (6 points)

Trois joueurs A, B, C s'affrontent simultanément dans un jeu. Les manches de ce jeu sont indépendantes et pour chaque manche il n'y a qu'un vainqueur possible. A et B sont de même force et gagnent chacun chaque manche avec la probabilité p , avec $0 < p < \frac{1}{2}$. Est déclaré vainqueur de ce jeu le premier joueur qui gagne deux manches consécutives.

1°) a) Quelle est la probabilité que A (respectivement B, C) gagne le jeu à l'issue de la seconde manche ?

b) Quelle est la probabilité que le jeu comporte au moins trois manches ? Quelle est la probabilité que A gagne à l'issue de la troisième manche ?

2°) Pour $n \geq 1$ soit A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement : " Le jeu n'est pas achevé avant la $n^{\text{ème}}$ manche, la $n^{\text{ème}}$ manche est gagnée par A (respectivement B, C) et le jeu continue "

a) Calculer $P(A_1), P(B_1), P(C_1), P(A_2), P(B_2), P(C_2)$.

b) Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* on a :

$$\begin{cases} P(A_{n+1}) = p \cdot (P(B_n) + P(C_n)) \\ P(B_{n+1}) = p \cdot (P(A_n) + P(C_n)) \\ P(C_{n+1}) = (1 - 2p) \cdot (P(A_n) + P(B_n)) \end{cases}$$

c) En déduire que l'on a, pour tout entier n : $P(A_n) = P(B_n)$ et déterminer une relation de récurrence liant les nombres $P(A_{n+2})$, $P(A_{n+1})$, $P(A_n)$.

3°) On suppose dans cette question, que l'on a : $p = 0,2$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(A_n)$ en fonction de n .

b) En déduire $P(C_n)$.

c) Calculer la probabilité que le jeu ne soit pas achevé à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ manche et déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

d) Pour $n \geq 2$, calculer la probabilité que A gagne le jeu à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ manche. En déduire la probabilité que A soit déclaré vainqueur. Quelle est la probabilité que C soit déclaré vainqueur ?

e) Soit X le nombre de manches jouées, jusqu'à ce que l'un des joueurs soit déclaré vainqueur. Déterminer la loi de X .

PROBLEME (10 points)

A condition d'admettre les résultats donnés dans l'énoncé, les différentes parties de ce problème sont très largement indépendantes.

PARTIE I

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = e^{-x}\sin^2x$.

1°) a) Déterminer les variations de g .

b) Tracer sur un même repère les courbes d'équations $y = g(x)$ et $y = e^{-x}$. (On se limitera à x compris entre 0 et 2π).

2°) Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{n\pi} g(x) dx$ et $v_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n e^{-k\pi}$.

a) Exprimer (u_n) et (v_n) en fonction de n .

b) Étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n) .

PARTIE II

Soit f une fonction continue et décroissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. On définit la fonction h sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = f(x)\sin^2x$.

On pose $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} h(x) dx$, $u_n = \int_0^{n\pi} h(x) dx$ et $v_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n f(k\pi)$.

1°) a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi}{2} f((k+1)\pi) \leq I_k \leq \frac{\pi}{2} f(k\pi)$.

b) En déduire que la suite (u_n) converge si et seulement si la suite (v_n) converge.

2°) Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} h(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature. (c'est à dire, sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes)

PARTIE III

1°) Montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ convergent.

On considère la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x} \left(1 + \frac{\sin x}{\ln(x+1)}\right)$.

2°) a) Montrer, qu'au voisinage de l'infini, $\varphi(x)$ est équivalent à $\frac{\sin x}{x}$.

b) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln(x+1)}$ diverge.

c) On considère la fonction ψ définie sur $]0, +\infty[$ par : $\psi(x) = \frac{\sin^2 x}{x \cdot \ln(x+1)}$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \psi(x) dx$ diverge.

d) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ diverge. Quelle conclusion peut-on tirer de la comparaison des résultats obtenus en III 1°) 2°) a) et d) ?

PARTIE IV

Compte tenu du résultat obtenu en III 1°), dire pourquoi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

On se propose, dans cette partie, de donner la valeur F de cette intégrale :

1°) Soit μ une fonction réelle de classe C^1 sur le segment $S = [0, \pi/2]$. Pour tout entier naturel k , on pose : $a_k = \int_0^{\pi/2} \mu(x) \cdot \sin(kx) dx$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'on a : $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

2°) Montrer que la fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment S et que cette fonction ainsi prolongée est de classe C^1 sur S .

3°) Montrer que pour tout entier naturel k , on a : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2k+1)x)}{\sin x} dx = \pi/2$ (on indiquera pourquoi cette intégrale existe).

En déduire que l'on a : $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2k+1)x)}{x} dx = \pi/2$ et donner alors la valeur de F.