

**EXERCICE 1**

Pour tout réel  $\alpha$  non nul on définit la matrice  $A$  suivante :  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ 1/\alpha & 0 & \alpha \\ 1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$ .

On pose par ailleurs :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. a) Calculer  $(A + I)(2I - A)$ .  
 b) En déduire sans calcul que  $-1$  et  $2$  sont des valeurs propres de  $A$ .  
 c)  $A$  est-elle inversible ?
2. On pose  $B = \frac{1}{3}(A + I)$  et  $C = \frac{1}{3}(2I - A)$ .  
 a) Montrer que  $B + C = I$  et que  $2B - C = A$ .  
 b) Montrer que  $B^2 = B$  et que  $C^2 = C$ .
3. Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que  $A^n = 2^n B + (-1)^n C$ .  
 Expliciter alors la matrice  $A^n$ .

**EXERCICE 2**

On étudie la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} F_0 = F_1 = 1, \\ \forall n > 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$

1. a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$ .  
 b) Ecrire en *Pascal* un algorithme permettant de calculer  $F_n$  pour un entier  $n$  donné.  
 Calculer  $F_{22}$ .
2. Montrer qu'il existe un unique couple de réels  $(\alpha, \beta)$  que l'on déterminera, tel que :
 
$$F_n = \alpha \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$
3. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$ .
4. a) Quelle est la limite de  $F_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ? Donner alors un équivalent de  $F_n$ .  
 b) Soit  $u_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$  pour  $n \geq 1$ .  
 Quelle est la limite de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ? On notera  $\omega$  cette limite.  
 c) Montrer que :  $u_{n+2} - u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{F_{n+1}F_{n-1}}$ .  
 En déduire le sens de variation des suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

5. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on a les relations :

$$\text{a) } \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} < \omega < \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}.$$

$$\text{b) } 0 < \omega - \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} < \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n}}.$$

6. En utilisant ces inégalités, écrire en *Pascal* un algorithme ne faisant intervenir que des opérations élémentaires sur des nombres entiers et qui donne une valeur approchée de  $\omega$  à  $10^{-8}$  près.

### EXERCICE 3

1. Pour  $n$  entier naturel non nul on définit sur  $] -1, 1[$  les fonctions  $f_n$ ,  $g_n$  et  $h_n$  suivantes :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k ; g_n(x) = \sum_{k=1}^n k x^k ; h_n(x) = \sum_{k=1}^n k^2 x^k.$$

a) Calculer  $f_n(x)$ ,  $f_n'(x)$  et  $f_n''(x)$  ainsi que leur limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (pour  $x$  fixé).

b) Exprimer  $g_n(x)$  et  $h_n(x)$  à l'aide de  $f_n'(x)$  et  $f_n''(x)$ .

c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x)$ .

2. Des objets en nombre illimité sont placés successivement dans trois cases dont la capacité est illimitée. Au départ les cases sont vides ; on suppose qu'à chaque fois qu'un objet est placé, la probabilité pour qu'il le soit dans une case donnée est égale à  $1/3$ .

Soit  $Y$  le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, deux cases exactement sont occupées par au moins un objet.

Soit  $Z$  le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, les trois cases contiennent chacune au moins un objet.

$Y$  et  $Z$  sont deux variables aléatoires.

a) Calculer pour  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $P(Y = k)$ .

b) Pour  $(l, k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$  calculer  $P(Z = l / Y = k)$ .

c) En déduire, pour  $l \geq 3$  :  $P(Z = l) = \left(\frac{2}{3}\right)^{l-1} - \frac{2}{3^{l-1}}$ .

Que vaut  $P(Z = l)$  pour  $l \leq 2$  ?

3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de  $Z$ .