

# ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1995

Option générale

## MATHEMATIQUES 1

Mardi 23 Mai 1995 de 14h à 18h

*Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.*

Dans tout le problème, et pour tout polynôme  $P$  à coefficients réels, on note  $M(P)$  le maximum de la fonction  $x \rightarrow |P(x)|$  sur le segment  $[-1, +1]$ .  
On se propose alors de majorer pour tout entier naturel  $k$  le maximum  $M(P^{(k)})$  (où  $P^{(k)}$  désigne la dérivée  $k^{\text{ème}}$  de  $P$ ) en fonction du maximum  $M(P)$ .

### PARTIE 1

On se propose d'étudier, dans cette partie, la suite de fonctions définies par récurrence pour tout nombre réel  $x$  par  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$ , puis pour  $n \geq 1$  par:

$$(1) \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

1°) Etude des polynômes  $T_n$ .

- Calculer  $T_n(x)$  pour  $n \leq 4$ .
- Etablir que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_n$  est un polynôme à coefficients entiers de degré  $n$  tel que, pour tout nombre réel  $x$ :  $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ .
- Déterminer les valeurs de  $T_n(1)$  et de  $T_n(-1)$ .



Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales  
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat  
affilié à la Chambre de Commerce et d'Industrie de Versailles - Val d'Oise-Yvelines ;  
membre de la Fesic

d) Dans la base canonique  $(X^n, \dots, X, 1)$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ , on note  $T_n$  sous la forme:

$$T_n(x) = \lambda_n [X^n + b_n X^{n-2} + c_n X^{n-4} + \dots].$$

Calculer le coefficient dominant  $\lambda_n$  du polynôme  $T_n$ . A l'aide de la relation (1), exprimer  $b_{n+1}$  en fonction de  $b_n$  et calculer  $b_n$  en fonction de  $n$  pour  $n \geq 2$ .

2°) Etude de la fonction  $T_n$  sur  $]1, +\infty[$  pour  $n \geq 1$ .

a) On considère la fonction définie pour  $u$  appartenant à  $]1, +\infty[$  par:

$$x = \frac{1}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right).$$

Etablir qu'elle réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  dans  $]1, +\infty[$ , puis montrer que:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left( u^n + \frac{1}{u^n} \right).$$

b) En déduire pour  $x > 1$  que  $T_n(x) > 1$ , et montrer par récurrence pour  $x \geq 1$  l'inégalité:

$$T_n(x) \leq 2^{n-1} x^n.$$

3°) Etude de la fonction  $T_n$  sur  $[-1, 1]$  pour  $n \geq 1$ .

a) A l'aide de la relation (1), établir pour tout nombre réel  $\theta$  l'égalité:

$$(2) \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

En déduire le maximum  $M(T_n)$ .

b) Pour tout entier  $k$  appartenant à  $\{0, 1, \dots, n\}$ , on pose  $\alpha_k = \cos[(n-k)\pi/n]$ .

*On remarquera que  $-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = +1$ .*

Calculer  $T_n(\alpha_k)$  pour  $0 \leq k \leq n$ , puis prouver que, si  $x$  désigne un nombre réel, l'égalité  $|T_n(x)| = M(T_n)$  a lieu si et seulement si  $x$  appartient à l'ensemble  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ .

4°) Equation différentielle vérifiée par  $T_n$  pour  $n \geq 1$ .

a) En dérivant la relation (2), exprimer  $T_n'(\cos\theta)$  en fonction de  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ). En déduire, pour  $n \geq 2$ , la valeur de  $T_n'(\alpha_k)$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ . Etait-ce prévisible?

A l'aide d'un passage à la limite, déterminer enfin  $T_n'(1)$  et  $T_n'(-1)$ .

b) En dérivant deux fois la relation (2), établir pour tout nombre réel  $x$  de  $[-1, +1]$ :

$$(3) \quad (x^2-1)T_n''(x) + xT_n'(x) - n^2T_n(x) = 0.$$

Prouver que cette relation reste valable pour tout nombre réel  $x$ .

c) Soit  $j$  un entier tel que  $0 \leq j \leq n-1$ . En dérivant  $j$  fois la relation (3), établir que:

$$T_n^{(j+1)}(1) = \frac{n^2 - j^2}{2j+1} T_n^{(j)}(1).$$

d) En déduire en fonction de  $n$  le nombre réel  $\mu_n$  tel que, pour  $1 \leq j \leq n$ :

$$T_n^{(j)}(1) = \mu_n \cdot 2^{j-1} \frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!}.$$

## PARTIE 2

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et les nombres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  sont ceux définis à la partie I. On pose alors pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j}.$$

### 1°) Etude d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ .

- Calculer  $L_k(\alpha_k)$  et  $L_k(\alpha_j)$  pour  $0 \leq k \leq n$  et  $0 \leq j \leq n, j \neq k$ .
- Etablir que la famille  $(L_0, L_1, \dots, L_{n-1}, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Déterminer quelles sont, dans cette base, les composantes d'un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  et, à l'aide des résultats de la partie I, donner les composantes de  $T_n$ .

### 2°) Majoration de $|P(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $d^\circ P \leq n$ .

- Etablir, pour  $x \geq 1$  et  $0 \leq k \leq n$ , l'inégalité  $(-1)^{n-k} L_k(x) \geq 0$ .

En déduire, pour  $x \geq 1$ , l'égalité  $T_n(x) = |L_0(x)| + |L_1(x)| + \dots + |L_{n-1}(x)| + |L_n(x)|$ .

- Etablir enfin, pour  $x \geq 1$  et pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , l'inégalité:

$$(4) \quad |P(x)| \leq M(P) T_n(x).$$

- On se propose enfin de minorer  $M(P)$  lorsque  $P$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  (c'est à dire un polynôme de degré  $n$  dont le coefficient de  $x^n$  est égal à 1).  
A l'aide de l'inégalité (4), établir successivement que l'on a, pour  $x \geq 1$  et pour tout polynôme unitaire  $P$  de degré  $n$ :

$$M(P) \geq \frac{|P(x)|}{2^{n-1} x^n} \quad ; \quad M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donner en fonction de  $T_n$  un polynôme unitaire de degré  $n$  tel que  $M(P) = 1/2^{n-1}$ .

### 3°) Majoration de $|P'(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $d^\circ P \leq n$ .

- Montrer à l'aide du théorème de Rolle (dont on rappellera précisément l'énoncé) que, pour  $0 \leq k \leq n$ , le polynôme  $L_k'$  possède  $n-1$  racines réelles, appartenant à  $] -1, +1[$ . Déterminer le coefficient dominant de  $L_k'$  et en déduire que, pour  $x \geq 1$ :  $(-1)^{n-k} L_k'(x) \geq 0$ .

- Pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , exprimer  $P'$  comme combinaison linéaire des polynômes  $L_0', L_1', \dots, L_n'$ .

En déduire, pour  $x \geq 1$ , l'égalité  $T_n'(x) = |L_0'(x)| + |L_1'(x)| + \dots + |L_{n-1}'(x)| + |L_n'(x)|$ .

- Etablir enfin, pour  $x \geq 1$  et pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , l'inégalité:

$$(5) \quad |P'(x)| \leq M(P) \cdot T_n'(x).$$

### 4°) Majoration de $|P^{(j)}(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $0 \leq j \leq d^\circ P \leq n$ .

- Montrer que, pour  $0 \leq k \leq n$ , le polynôme  $L_k^{(j)}$  (dérivé  $j^{\text{ème}}$  de  $L_k$ ) possède  $n-j$  racines réelles, appartenant à  $] -1, +1[$ , et en déduire que, pour  $x \geq 1$ :  $(-1)^{n-k} L_k^{(j)}(x) \geq 0$ .

- En raisonnant comme précédemment, établir pour  $x \geq 1$  et tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ :

$$(6) \quad |P^{(j)}(x)| \leq M(P) \cdot T_n^{(j)}(x).$$

### PARTIE 3

Dans cette partie, on désigne par  $\lambda$  un nombre réel appartenant à  $[0, 1]$ .

1°) Déterminer l'image du segment  $[-1, +1]$  par l'application:

$$x \rightarrow \frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}.$$

On pose alors pour tout polynôme  $P$  à coefficients réels de degré  $n \geq 1$ :

$$P_\lambda(x) = P\left(\frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}\right).$$

Etablir que  $M(P_\lambda) \leq M(P)$ .

2°) Majoration de  $M(P')$  en fonction de  $M(P)$ .

a) Déterminer  $P'_\lambda(1)$  et déduire de l'inégalité (5) que l'on a:

$$|P'_\lambda(1)| \leq \frac{2n^2}{1+\lambda} M(P).$$

b) En déduire que:

$$(7) \quad M(P') \leq 2n^2 M(P).$$

(On pourra aussi introduire le polynôme  $Q$  défini par  $Q(x) = P(-x)$ ).

3°) Majoration de  $M(P^{(j)})$  en fonction de  $M(P)$ .

a) Déduire de l'inégalité (7) que, pour tout entier  $j$  tel que  $0 \leq j \leq n$ :

$$(8) \quad M(P^{(j)}) \leq 2^j \frac{n!}{(n-j)!} M(P).$$

b) On se propose enfin d'améliorer cette inégalité (8). Etablir que:

$$|P^{(j)}(\lambda)| \leq \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^j T_n^{(j)}(1) M(P).$$

En déduire que, pour tout entier  $j$  tel que  $1 \leq j \leq n$ :

$$M(P^{(j)}) \leq n 2^{2j-1} \frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!} M(P)$$

et prouver que cette majoration est meilleure que celle obtenue en (8).

\*\*\*