

**Exercice 1**

On étudie dans cet exercice une situation probabiliste décrite dans la question 4°.

Les deux premières questions ont pour but d'étudier les puissances de la matrice carrée d'ordre 10 définie par:

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}$$

où  $a$  et  $b$  ( $b \neq 0$ ) désignent des nombres réels.

1°) Recherche des matrices  $M(a, b)$  telles que  $[M(a, b)]^2 = M(a, b)$ .

a) Exprimer  $[M(a, b)]^2$  comme combinaison linéaire de  $M(a, b)$  et de  $I_{10}$ , où  $I_{10}$  désigne la matrice-identité d'ordre 10.

b) Déterminer les couples  $(a, b)$  avec  $b \neq 0$  tels que  $[M(a, b)]^2 = M(a, b)$ .

2°) Calcul des puissances de  $M(a, b)$ .

On considère les matrices  $P = M(1/10, 1/10)$  et  $Q = I_{10} - P$ .

a) Calculer  $P^2$ ,  $Q^2$ ,  $PQ$  et  $QP$ . En déduire les puissances  $P^k$  et  $Q^k$  pour  $k \geq 1$ .

b) Exprimer  $M(a, b)$  comme combinaison linéaire de  $P$  et de  $Q$  et en déduire  $[M(a, b)]^n$  comme combinaison linéaire des matrices  $P$  et  $Q$ . Expliciter enfin la matrice  $[M(a, b)]^n$ .

3°) Limite des puissances de  $M(1-9b, b)$  pour  $0 < b \leq 1/9$ .

On suppose que  $a$  et  $b$  sont des nombres réels positifs tels que  $a+9b = 1$  (donc  $a = 1-9b$ ).

On dit que la suite des matrices  $[M(a, b)]^n$  converge vers une matrice  $L$  lorsque tous les coefficients de  $[M(a, b)]^n$  convergent vers les coefficients respectifs de  $L$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

a) Déterminer la matrice limite  $L$  de la suite  $[M(1-9b, b)]^n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) Exprimer la matrice  $L$  comme combinaison linéaire des matrices  $P$  et  $Q$ .

4°) Etude des déplacements d'un pion sur un damier.

On considère un damier à 10 cases numérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On considère les déplacements d'un pion, situé à l'instant 0 sur la case 0, et à l'instant  $n$

(où  $n$  désigne un entier naturel) sur une case dont le numéro est une variable aléatoire  $X_n$ .

On fait enfin les hypothèses suivantes concernant les déplacements du pion: si à l'instant

$n$  le pion est sur la case  $k$  ( $0 \leq k \leq 9$ ), il se trouve encore sur la case  $k$  à l'instant  $n+1$  avec

la probabilité  $1/2$ , et sinon, il se trouve de façon équiprobable sur l'une des autres cases.

a) Pour tout entier  $j$  compris entre 0 et 9, exprimer la probabilité  $P(X_{n+1} = j)$  en fonction des probabilités  $P(X_n = 0)$ ,  $P(X_n = 1)$ , ...,  $P(X_n = 9)$ .

On note  $V_n$  le vecteur-colonne dont les composantes sont, de haut en bas, les probabilités  $P(X_n = 0)$ ,  $P(X_n = 1)$ , ...,  $P(X_n = 9)$ . Déterminer une matrice carrée  $M$  d'ordre 10 telle que:

$$V_{n+1} = MV_n.$$

b) Calculer en fonction de  $n$  les probabilités  $P(X_n = 0)$ ,  $P(X_n = 1)$ , ...,  $P(X_n = 9)$ , puis leurs limites quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## Exercice 2

On désigne par  $n$  un nombre entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation  $e^x = x^n$ , que l'on note  $(E_n)$ . A cet effet, on introduit la fonction  $f_n$  définie par:

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

### A) ETUDE DES RACINES POSITIVES DE $(E_n)$ .

1°) Etude des racines positives des équations  $(E_1)$  et  $(E_2)$ .

- Etudier et représenter sur  $[0, +\infty[$  les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ .
- Etudier l'existence de racines positives pour les équations  $(E_1)$  et  $(E_2)$ .

2°) Etude des racines positives de l'équation  $(E_3)$ .

- Etudier et représenter sur  $[0, +\infty[$  la fonction  $f_3$ .

En déduire que l'équation  $(E_3)$  admet deux racines positives  $u$  et  $v$  telles que  $1 < u < v$ , et encadrer chacune d'elles entre deux entiers consécutifs.

b) Soit la suite définie par la relation  $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$  et la condition initiale  $y_0$ , où  $y_0$  est un nombre réel strictement supérieur à  $u$ .

- Montrer que, si  $u < y_0 \leq v$ , alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u < y_n \leq v$ .
- Montrer que, si  $v \leq y_0$ , alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v \leq y_n$ .
- Etudier le signe de  $y_{n+1} - y_n$  en fonction du signe de  $y_n - y_{n-1}$ .

En déduire, selon la position de  $y_0$  par rapport à  $v$ , le sens de variation de la suite  $(y_n)$ .  
Etudier enfin la convergence et la limite de la suite  $(y_n)$ .

c) On choisit désormais  $y_0 = 4$ .

Ecrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de  $y_n$  pour un entier  $n$  donné.

Etablir pour tout entier naturel  $n$  que  $0 \leq v - y_{n+1} \leq 0.75(v - y_n)$ , puis que  $0 \leq v - y_n \leq (0.75)^n$ .  
Comment suffit-il de choisir l'entier  $n$  pour que  $y_n$  constitue une valeur approchée de  $v$  à  $10^{-5}$  près?

Donner cette valeur de  $y_n$  avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

d) Soit la suite définie par la relation  $x_{n+1} = \exp(x_n/3)$  et la condition initiale  $x_0$ , où  $x_0$  est un nombre réel positif strictement inférieur à  $v$ .

- Montrer que, si  $u \leq x_0 < v$ , alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u \leq x_n < v$ .
- Montrer que, si  $x_0 \leq u$ , alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_n \leq u$ .
- Etudier le signe de  $x_{n+1} - x_n$  en fonction du signe de  $x_n - x_{n-1}$ .

En déduire, selon la position de  $x_0$  par rapport à  $u$ , le sens de variation de la suite  $(x_n)$ .  
Etudier enfin la convergence et la limite de la suite  $(x_n)$ .

e) On choisit désormais  $x_0 = 2$ .

Etablir pour tout entier naturel  $n$  que  $0 \leq x_{n+1} - u \leq 0.65(x_n - u)$ , puis que  $0 \leq x_n - u \leq (0.65)^n$ .

Ecrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de  $x_n$  pour un entier  $n$  donné.

Comment suffit-il de choisir l'entier  $n$  pour que  $x_n$  constitue une valeur approchée de  $u$  à  $10^{-5}$  près?

Donner cette valeur de  $x_n$  avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

**3°) Etude des racines positives de l'équation  $(E_n)$  pour  $n \geq 3$ .**

- a) Etudier sur  $[0, +\infty[$  la fonction  $f_n$ . En déduire que l'équation  $(E_n)$  admet deux racines positives  $u_n$  et  $v_n$  telles que  $1 < u_n < v_n$ .
- b) Déterminer, pour  $n \geq 4$ , le signe de  $f_n(u_{n-1})$ . Déduire des variations de la fonction  $f_n$  le sens de variation de la suite  $(u_n)$ , puis prouver la convergence de celle-ci.
- c) Montrer que  $u_n = \exp(u_n/n)$ , et en déduire la limite  $L$  de la suite  $(u_n)$ , puis un équivalent simple de  $u_n - L$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- d) Déterminer, pour  $n \geq 4$ , le signe de  $f_n(v_{n-1})$ . Déduire des variations de la fonction  $f_n$  le sens de variation de la suite  $(v_n)$ , puis étudier la limite de celle-ci.
- e) On pose pour tout réel  $x > 1$ :  $g(x) = x - \ln(x)$ . Montrer (à l'aide d'un théorème dont on rappellera l'énoncé) que  $g$  réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $]1, +\infty[$ .  
Etablir que  $g(v_n/n) = \ln(n)$ , montrer à l'aide de  $g^{-1}$  (bijection réciproque de  $g$ ) que  $v_n/n$  tend vers  $+\infty$ , puis en déduire un équivalent de  $v_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**B] ETUDE DES RACINES NEGATIVES DE  $(E_n)$ .****1°) Existence de racines négatives de  $(E_n)$ .**

- a) Etudier sur  $] -\infty, 0]$  les fonctions  $f_{2k}$  et  $f_{2k-1}$  pour tout entier  $k \geq 1$ .
- b) A quelle condition sur l'entier  $n$  l'équation  $(E_n)$  admet-elle des racines négatives?

**2°) Etude des racines négatives de l'équation  $(E_{2n})$ .**

- a) Encadrer entre deux entiers consécutifs la racine négative  $w_n$  de l'équation  $(E_{2n})$  et déterminer, pour  $n \geq 2$ , le signe de  $f_{2n}(w_{n-1})$ .
- b) En déduire le sens de variation, la convergence et la limite  $L$  de la suite  $(w_n)$ , puis un équivalent simple de  $w_n - L$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .