



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I
OPTION GENERALE

lundi 22 mai 1995, de 14 h à 18 h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Sont autorisées: - Règles graduées.
Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel \mathbb{R}^m (où le nombre entier m est supérieur ou égal à 2) vérifiant certaines relations.

Dans toute la suite, si f désigne un tel endomorphisme et k un entier strictement positif, on note f^k la composée $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$. Enfin on désigne par I l'application identité de \mathbb{R}^m et par I_m la matrice identité d'ordre m .

On rappelle que l'espace vectoriel \mathbb{R}^m est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G si tout vecteur x de \mathbb{R}^m peut se décomposer de manière unique sous forme $x = y + z$, avec y et z appartenant respectivement à F et G . L'application qui à x associe cet unique vecteur y est le projecteur de \mathbb{R}^m sur F dans la direction G .

PARTIE I.

On considère dans cette partie un endomorphisme f de l'espace vectoriel \mathbb{R}^m vérifiant la relation :

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + I) \quad (1)$$

1. Recherche de solutions particulières de (1).

Déterminer les réels α tels que $f = \alpha I$ vérifie (1).

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes f et I sont linéairement indépendants.

a. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de I et de f .

Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe un couple (a_n, b_n) de nombres réels et un seul tel que : $f^n = a_n f + b_n I$.

Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Former une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n d'une part et entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n d'autre part.

En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

c. On convient d'appeler limite de $f_n = a_n f + b_n I$ l'endomorphisme $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I$.

Calculer p^2 et en déduire que p est un projecteur.

d. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de I .

3. Étude des éléments propres de f et des solutions de (1).

a. Soit λ une valeur propre de f . En appliquant la relation (1) à un vecteur propre non nul x de f associé à λ , établir que λ vérifie l'équation $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. En déduire les valeurs propres éventuelles de f .

b. On suppose donné un vecteur x de \mathbb{R}^m écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(f - I)$ et $z \in \text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

Exprimer $f(x)$ à l'aide de y et z puis y et z en fonction de x et $f(x)$.

En déduire que \mathbb{R}^m est somme directe de $\text{Ker}(f - I)$ et de $\text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, que p est le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et que f est diagonalisable.

c. On pose $r = \dim \text{Ker}(f - I)$ ($0 \leq r \leq m$).

Déterminer f lorsque $r = 0$ ou $r = m$.

On suppose désormais $0 < r < m$.

Écrire la matrice M de f dans une base de \mathbb{R}^m obtenue par réunion d'une base (e_1, e_2, \dots, e_r) de $\text{Ker}(f - I)$ et d'une base $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_m)$ de $\text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

d. Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^2 = \frac{1}{2}(M + I_m)$.

e. Calculer $(f + \frac{1}{2}I) \circ (f - I)$.

En déduire que $\text{Im}(f - I)$ est inclus dans $\text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.

Ainsi donc, p est aussi le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Im}(f - I)$.

PARTIE II.

1. Étude d'une suite récurrente.

On étudie dans cette question la convergence des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1} + u_n}{3} \quad (2)$$

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $r^3 = \frac{r^2 + r + 1}{3}$. On précisera ses racines et l'on notera α et $\bar{\alpha}$ ses racines complexes conjuguées.
- Déterminer les suites géométriques $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2).
- On associe à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2) le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = u_0 \\ x + \alpha y + \bar{\alpha} z = u_1 \\ x + \alpha^2 y + \bar{\alpha}^2 z = u_2 \end{cases}$$

- En formant la combinaison linéaire $3u_2 + 2u_1 + u_0$ exprimer x en fonction de u_0, u_1, u_2 et montrer que le système précédent admet une solution (x, y, z) et une seule. (On ne demande pas le calcul des inconnues y et z .)
- Établir par récurrence que l'on a pour tout entier naturel n : $u_n = x + y\alpha^n + z\bar{\alpha}^n$.
- Déterminer le module de α et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de u_0, u_1 et u_2 .

On considère désormais un endomorphisme f de l'espace vectoriel \mathbb{R}^m vérifiant la relation :

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I) \quad (3)$$

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes I, f et f^2 sont linéairement indépendants.

- Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe un triplet (a_n, b_n, c_n) de nombres réels et un seul tel que $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$.

Déterminer a_n, b_n, c_n pour $0 \leq n \leq 2$ et exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n pour $n \in \mathbb{N}$.

- Prouver que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la relation (2).
En déduire les limites $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ et $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$ de ces trois suites.
- On convient d'appeler limite de $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ l'endomorphisme $q = af^2 + bf + cI$.
Établir que q est un projecteur.
- Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f^2, f et I .

3. Étude du projecteur q .

- Déterminer les valeurs propres réelles éventuelles de f .
Existe-t-il un endomorphisme diagonalisable vérifiant (3) ?
- On suppose donné un vecteur x de \mathbb{R}^m écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(f - I)$ et $z \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.
Exprimer y et z en fonction de $x, f(x)$ et $f^2(x)$.
En déduire que \mathbb{R}^m est somme directe de $\text{Ker}(f - I)$ et de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et que q est le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.
- Calculer $(3f^2 + 2f + I) \circ (f - I)$.
En déduire que $\text{Im}(f - I)$ est inclus dans $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.
Ainsi donc, q est aussi le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Im}(f - I)$.

4 Étude des solutions de (3)

- a. On suppose dans cette question que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 0$.
Soit e_1 un vecteur non nul appartenant à $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. En déduire que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geq 2$.
- b. On suppose dans cette question que $m = 2$. Ainsi f est-il un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
Déterminer les dimensions possibles de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et de $\text{Ker}(f - I)$.
En déduire qu'il existe des bases de \mathbb{R}^2 dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps \mathbb{R} ?

- c. On suppose dans cette question que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 2$.
Soit e_2 un vecteur de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ tel que la famille $(e_1, f(e_1), e_2)$ soit libre. Montrer que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est encore une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. En déduire que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geq 4$.
- d. On suppose dans cette question que $m = 3$. Ainsi f est-il un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
Déterminer les dimensions possibles de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et de $\text{Ker}(f - I)$.
En déduire qu'il existe des bases de \mathbb{R}^3 dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps \mathbb{R} ?

- e. Étudier de la même manière le cas $m = 4$ en précisant les formes possibles de la matrice de l'endomorphisme f dans des bases convenables de \mathbb{R}^4 .
- f. On suppose désormais $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 2q$ avec q entier naturel non nul.
Soit $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$ une famille libre de vecteurs de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. On peut donc trouver un vecteur e_{q+1} appartenant à $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ tel que $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1})$ soit encore une famille libre.
Montrer que $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1}))$ est une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et en déduire que la dimension de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est paire.
- g. On pose $2r = \dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ ($0 \leq 2r \leq m$).
Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans une base de \mathbb{R}^m obtenue par réunion d'une base convenable de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et d'une base de $\text{Ker}(f - I)$.
- h. Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^3 = \frac{1}{3}(M^2 + M + I_m)$.

————— FIN —————