ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles:
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

CONCOURS D'ADMISSION 1996

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Option Générale

Aucun document n'est autorisé
L'énoncé comporte 5 pages.

Les canditats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

EXERCICE 1

1.1. Étude préliminaire

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{*+} & f(x) = x^x \\ f(0) = 1 & \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Dresser le tableau des variations de f.
3. On considère un repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan et l'on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans ce repère. Quelle est la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à sa tangente $(\mathcal{T})$ en son point d'abscisse 1 ?
4. On note g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$. Démontrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

1.2. Étude d'une fonction

1. Démontrer qu'il existe une application φ de J sur I telle que :

$$\forall x \in J \qquad \varphi(x)^{\varphi(x)} = x$$

2. Établir que φ est négligeable devant la fonction logarithme népérien au voisinage de plus l'infini.
3. Déterminer le plus grand intervalle K inclus dans J sur lequel φ est dérivable et montrer que :

$$\forall x \in K \qquad \varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x\left(\varphi(x) + \ln x\right)}$$

4. On note (Γ) la courbe représentative de φ dans le repère $\mathcal{R}$, et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on note $(\mathcal{T}_n)$ la tangente à (Γ) en son point d'abscisse n.

   a. Déterminer l'abscisse u_n du point d'intersection de $(\mathcal{T}_n)$ avec l'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$.

   b. Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers plus l'infini.

EXERCICE 2

Désignant par n un entier naturel, on se propose de déterminer l'ensemble des polynômes $P(X)$ à coefficients réels tels que :

$$P(X) + P(X+1) = 2X^n \qquad (1)$$

1. On considère l'application Φ qui, à tout élément $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, associe le polynôme :

$$\Phi[Q(X)] = Q(X) + Q(X+1)$$

   a. Établir que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

   b. Notant p un entier naturel, on désigne par Φ_p la restriction de Φ à $\mathbb{R}_p[X]$.

      i. Montrer que Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

      ii. On note $B_p = (1, X, X^2, ..., X^p)$ la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$. Établir que la matrice de Φ_p dans B_p est une matrice triangulaire supérieure dont on déterminera les termes diagonaux.

      iii. En déduire que Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

   c. Prouver que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

   d. Démontrer qu'il existe un polynôme unique de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation (1). On précisera son degré et on le notera $E_n(X)$.

2. On écrit :

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k$$

   a. Vérifier que :

$$E_n(X+1) + E_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} C_k^j a_{n,k} \right] X^j$$

   b. En déduire le système dont les $a_{n,k}$ sont les solutions. Préciser la valeur de $a_{n,n}$.

   c. Déterminer $E_0(X)$, $E_1(X)$ et $E_2(X)$.

   d. Démontrer que , pour tout entier naturel n :

$$E_n'(X) = nE_{n-1}(X)$$

   et en déduire l'expression de $E_n^{(k)}(X)$ (dérivée k-ème de $E_n(X)$).

   e. Montrer que :

$$E_n(X) = (-1)^n E_n(1-X)$$

   et en déduire, pour n pair strictement positif, la valeur de $E_n(0)$ et $E_n(1)$, ainsi que, pour n impair, la valeur de $E_n(\frac{1}{2})$.

   f. Déterminer $E_3(X)$ et $E_4(X)$.

PROBLÈME 3

3.1. Étude d'une variable aléatoire X :

1. On considère la fonction numérique F de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

et l'on note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

   a. Dresser le tableau des variations de F. On notera f la dérivée de F.

   b. Démontrer que le point $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (Γ). Donner une équation de la tangente (Δ) à (Γ) en Ω.

   c. Établir que f est paire, et étudier la concavité de (Γ).

   d. Construire (Γ) et (Δ).

   e. Prouver que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$, et exprimer $F^{-1}(x)$ pour x élément de $]0,1[$.

   f. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. On désigne par X une variable aléatoire admettant f pour densité de probabilité.

   a. Déterminer les quartiles de X, c'est-à-dire les réels Q_i vérifiant, pour i entier compris entre 1 et 3 :

$$F(Q_i) = \frac{i}{4}$$

   et les faire apparaître sur la figure du 3.1.1.d.

   b. Soit ε un élément de $]0,1[$. Exprimer en fonction de ε le plus petit réel α tel que :

$$P\left[\{|X| > \alpha\}\right] \leqslant \varepsilon$$

   c. Montrer que X possède une espérance mathématique et la calculer.

3.2. Calcul de deux intégrales :

On se propose dans cette partie de calculer les deux intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$$

(On rappelle le résultat suivant : Si f est une fonction continue sur $]0,\ 1]$, prolongeable par continuité à droite en zéro, alors l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ est convergente).

1. Étude de la convergence de I et J.

   a. Démontrer que J est convergente.

   b. Pour tout réel ε de $]0,\ 1]$, on pose :

   $$h(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{1+x}\, dx$$

   Montrer que h est monotone et bornée sur $]0,\ 1]$. En déduire que l'intégrale I est convergente.

2. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout élément x de $[0, 1]$, on a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \qquad (1)$$

3. On désigne par k un entier naturel. Établir la convergence de l'intégrale :

$$I_k = \int_0^1 x^k \ln x\, dx$$

   et la calculer.

4. Étudier succinctement les variations de la fonction ρ continue sur $[0, 1]$ et définie par :

$$\begin{cases} \rho(0) = 0 & \\ \forall x \in\ ]0,1] & \rho(x) = x \ln x \end{cases}$$

5. Montrer, grâce à la relation (1), que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\, dx - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k \right| \leqslant \frac{1}{e(n+1)}$$

   puis que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k^2}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = I$$

6. On note θ la fonction continue sur $[0, 1]$ définie par :

$$\begin{cases} \theta(0) = 1 & \\ \forall x \in\ ]0,1]\ , & \theta(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \end{cases}$$

a. Déduire de (1) que, pour tout entier naturel non nul n, il existe une fonction R_n définie sur $[0,1]$ telle que, pour tout élément x de $[0,1]$, on ait :

$$\theta(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k + R_n(x) \qquad \text{et} \qquad |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+2} x^{n+1}$$

b. En déduire que :

$$\left| \int_0^1 \theta(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)^2}$$

et que $J = -I$.

7. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire que :

$$J = -I = \frac{\pi^2}{12}$$

3.3. Calcul de la variance de X :

1. Prouver que X possède une variance.

2. Démontrer, en utilisant la parité de f et un changement de variable, que :

$$V(X) = 2 \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2}\, dx$$

3. Calculer la dérivée de la fonction ψ définie sur $]0,1]$ par :

$$\psi(x) = \frac{x \ln x}{1+x} - \ln(1+x)$$

et déterminer :

$$\lim_{x \to 0} (\ln x)\psi(x)$$

4. En déduire, grâce à une intégration par parties, que :

$$V(X) = 2\,(J - I)$$

et donner enfin la valeur de $V(X)$.