Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1996

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve
(option scientifique)

Lundi 6 mai 1996 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées :

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

PREMIER PROBLÈME

PREMIÈRE PARTIE

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme P_n par :

$$P_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} (1-X^2)^k X^{n-2k},$$

c'est-à-dire, si on note $E\left(\frac{n}{2}\right)$ la partie entière de $\frac{n}{2}$:

$$P_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} (1-X^2)^k X^{n-2k}.$$

1. Vérifier que $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$, $P_2 = 4X^2-1$.
   Calculer P_3.
2. Etudier la parité du polynôme P_n suivant la parité de l'entier naturel n.

3. a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :

$$\sin(n+1)t = \sin t \, P_n(\cos t).$$

(On pourra développer $(\cos t + i \sin t)^{n+1}$ et étudier la partie imaginaire.)

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le polynôme P_n vérifie la relation :

$$(n^2+2n)P_n - 3XP'_n - (X^2-1)P''_n = 0 .$$

(On pourra dériver deux fois dans la relation obtenue à la question 3.a.)

4. a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :

$$\sin(n+2)t + \sin nt = 2\cos t \sin(n+1)t.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P_{n+1} - 2XP_n + P_{n-1} = 0 .$$

c. Montrer, en utilisant la relation précédente, que P_n est un polynôme de degré n et déterminer le coefficient dominant a_n de P_n, c'est-à-dire le coefficient de X^n dans P_n .

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, n désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2 . On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et B_0 la base $(1, X, ..., X^n)$ de E .

Soit Φ l'application qui, à tout polynôme P de E , associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par :

$$\Phi(P) = 3XP' + (X^2-1)P'' .$$

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E .

2. a. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer $\Phi(X^k)$.

b. Déterminer une base de l'image de Φ .

c. Déterminer une base du noyau de Φ .

3. On considère les polynômes $P_0, P_1, ..., P_n$ définis dans la première partie.

a. Vérifier que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E .

b. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer $\Phi(P_k)$.
(On pourra utiliser le résultat de la question 3.b. de la première partie.)

c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ .

d. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer l'ensemble S_k des polynômes P de E tels que :

$$\Phi(P) = P_k .$$

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'application $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \, dt .$$

En particulier : $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

I. Étude de f

1. Montrer que f est décroissante et est positive ou nulle.

2. Démontrer : $\forall x \in [1\,;+\infty[,\ (x+1)f(x+1) = x f(x-1)$.

   On pourra intégrer par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+1} dt$, en remarquant $(\sin t)^{x+1} = (\sin t)^x \sin t$.

On note $g : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, par :

$$g(x) = (x+1)\, f(x+1)\, f(x) .$$

3. a. Montrer que g est 1 – périodique, c'est-à-dire :

   $$\forall x \in [0\,;+\infty[,\ g(x+1) = g(x) .$$

   b. En déduire : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ g(x+n) = g(x)$.

   c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = \frac{\pi}{2}$.

4. a. Soit $x \in [0\,;1]$.

   α. En utilisant 1., montrer :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le (x+n+1)\, f(n+1)\, f(n+2) \le g(x+n) \le (x+n+1)\, f(n)\, f(n+1) .$$

   β. En déduire :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n+x+1}{n+2} \le g(x) \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n+x+1}{n+1} .$$

   γ. Démontrer : $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

   b. En déduire : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ g(x) = \frac{\pi}{2}$.

5. a. Établir : $\forall x \in [1\,;+\infty[,\ 0 \le f(x) \le \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

II. Convergence et somme de la série de terme général $(-1)^n f(n)$

On note, pour tout n de IN : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(k)$.

1. a. Montrer que les suites $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
(On pourra utiliser **I**.1. et **I**.5.)

   b. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n f(n)$.

On considère l'application $\varphi : \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, par : $\varphi(t) = \frac{1}{1+\sin t}$.

2. a. Montrer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\cos u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}}$.

   b. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,dt$.

3. On note, pour tout n de IN : $D_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,dt - S_n$.

   a. Montrer, pour tout n de IN :

$$D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+\sin t} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\sin t)^k \right) dt = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt.$$

   b. En déduire : $D_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

   c. Quelle est la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n)$?