CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION SCIENTIFIQUE

Mercredi 15 mai 1996, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées *:* *Règles graduées.*
Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux. On note $M_p(\mathbf{R})$ l'algèbre des matrices carrées à coefficients réels et I_p la matrice identité. Pour tout élément M de $M_p(\mathbf{R})$ et pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, on note $a_{i,j}(M)$ le coefficient de M situé sur la ième ligne et la jème colonne.

Une matrice M appartenant à $M_p(\mathbf{R})$ est dite *stochastique* si elle satisfait aux deux conditions suivantes:

(i) Pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, $a_{i,j}(M) \geq 0$.
(ii) Pour tout entier i compris entre 1 et p, $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(M) = 1$.

On dit qu'une suite indexée par n, $(M_n) = (M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots)$ de matrices appartenant à $M_p(\mathbf{R})$ converge vers un élément M de $M_p(\mathbf{R})$ si, pour tout couple (i,j), la suite des coefficients $a_{i,j}(M_n)$ converge vers $a_{i,j}(M)$; on dit alors que M est la limite de la suite (M_n).

Etant donnée une matrice A appartenant à $M_p(\mathbf{R})$, pour tout entier $n \geq 0$, on note C_n la matrice définie par la relation:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\left[I_p + A + A^2 + \cdots + A^n\right] \tag{1}$$

On dit enfin qu'une matrice A de $M_p(\mathbf{R})$ est $r-$périodique où r est un entier strictement positif, si $A^r = I_p$.

L'objectif du problème est d'étudier quelques propriétés des matrices stochastiques et notamment, la convergence de la suite (C_n) lorsque A est stochastique et $r-$périodique.

I. Etude d'exemples.

1. Soit α un nombre réel. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}\left[1 + \alpha + \alpha^2 \cdots + \alpha^n\right]$$

a). Calculer γ_n, en distinguant deux cas: $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$.
b). Etudier en fonction de α, la convergence de la suite (γ_n) et, en cas de convergence, préciser sa limite.

2. Premier exemple d'étude de (C_n).
On prend $p = 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a). Calculer A^2 et A^3. En déduire A^k pour tout entier k. On distinguera trois cas selon que $k = 3h$, $k = 3h+1$, et $k = 3h+2$.
b). Pour tout entier q, calculer C_{3q}, C_{3q+1} et C_{3q+2}. En déduire que la suite (C_n) converge et préciser sa limite C.
c). Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et v l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à C. Déterminer le noyau F de v et prouver que son image G est la droite vectorielle $\mathbf{R}e$ de vecteur directeur $e = \frac{1}{3}[e_1 + e_2 + e_3]$. Prouver que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires et que v est le projecteur de $\mathbf{R}^3$ sur G parallèlement à F.

3. Deuxième exemple d'étude de (C_n).

On prend $p = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On note w l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à A.
a). Déterminer les valeurs propres de w et une base (f_1, f_2) de vecteurs propres de w.
b). Déterminer une matrice inversible P telle que:

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

En déduire une expression de A^k, pour tout entier $k \geq 0$.

c). Déterminer deux matrices U et V appartenant à $M_2(\mathbf{R})$, telles que, pour tout $k \geq 0$,

$$A^k = U + (-\frac{1}{6})^k V$$

d). Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer C_n en fonction de n, U et V et déterminer la limite C de la suite (C_n).

e). Prouver que l'endomorphisme v de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à C est un projecteur dont on précisera le noyau F et l'image G.

II. Etude de (C_n) lorsque A est r−périodique.

On désigne par r un entier strictement positif.

1. Soit (α_k) une suite r−périodique de nombres réels, c'est-à-dire telle que, pour tout entier naturel $k \geq 0$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On pose:

$$\gamma = \frac{1}{r}[\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}]$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose:

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}[\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n] \qquad (2)$$

a). Prouver que pour tout entier $k \geq 0$,

$$\gamma = \frac{1}{r}[\alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+r-1}]$$

b). Montrer que la suite de terme général

$$\beta_n = (n+1)\gamma_n - (n+1)\gamma$$

est r−périodique. En déduire que (β_n) est bornée.

c). Etablir que (γ_n) converge et préciser sa limite.

2. Soit A une matrice r−périodique appartenant à $M_p(\mathbf{R})$.

a). Montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et p, la suite de terme général $\alpha_k = a_{i,j}(A^k)$ est r−périodique. En déduire que la suite (C_n) converge vers:

$$C = \frac{1}{r}[I_p + A + \cdots + A^{r-1}]$$

b). Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$, u et v les endomorphismes de $\mathbf{R}^p$ canoniquement associés aux matrices A et C. Prouver que $u^r = I$, où I est l'endomorphisme identique de $\mathbf{R}^p$. Montrer que $v \circ u = u \circ v$ et que $u \circ v = v$.

c). Soit x un élément de $\mathbf{R}^p$. Prouver que $u(x) = x$ si et seulement si $v(x) = x$, puis que x appartient à $\operatorname{Im} v$ si et seulement si $u(x) = x$. En déduire que $\operatorname{Im} v = \ker(u - I)$.

d). Montrer que v est le projecteur sur $G = \operatorname{Im} v$ parallèlement à $F = \ker v$.

e). Etablir enfin que $\ker v = \operatorname{Im}(u - I)$: on pourra d'abord prouver que $\operatorname{Im}(u - I) \subset \ker v$.

3 a). Soit (α_k) une suite de nombres réels r−périodique *à partir d'un certain rang positif* m, c'est-à-dire telle que pour tout $k \geq m$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On définit (γ_n) par la relation (2). Prouver que γ_n admet une limite que l'on précisera. Pour cela, on pourra considérer la suite $\alpha'_k = \alpha_{k+m}$, observer que (α'_k) est $r-$périodique, et prouver que, γ'_n étant associée à (α'_k) par la relation (2), $\gamma'_n - \gamma_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

b). Soit A une matrice de $M_p(\mathbf{R})$ $r-$périodique *à partir d'un certain rang positif* m, c'est-à-dire telle que, pour tout entier $k \geq m$, $A^{k+r} = A^k$. Prouver que la suite (C_n) admet une limite C que l'on précisera.

III. Etude de matrices stochastiques.

On note S_p l'ensemble des matrices *stochastiques* de $M_p(\mathbf{R})$ et D_p l'ensemble des matrices *déterministes*, c'est-à-dire stochastiques et dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1. Enfin, on note Δ_p l'ensemble des matrices déterministes et inversibles.

1. Matrices stochastiques.

a) Prouver que, pour tout couple (λ, μ) de nombres réels tels que $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$, et pour tout couple (M, N) d'éléments de S_p, $\lambda M + \mu N$ appartient encore à S_p.

b). Prouver que le produit MN de deux éléments M et N de S_p appartient à S_p.

c). Soit A un élément de S_p. Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$, C_n (définie par (1)) appartient à S_p. Que peut-on en déduire pour la limite C de (C_n), lorsqu'elle existe?

2. Matrices déterministes.

a). Montrer qu'une matrice M est déterministe si et seulement si tous ses coefficients sont égaux à 0 ou à 1 et si chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1.

b). En déduire que D_p est un ensemble fini et préciser le nombre de ses éléments.

c). Montrer que le produit MN de deux éléments M et N de D_p appartient à D_p.

d). Soit A une matrice déterministe. Prouver qu'il existe un entier $r \geq 1$ et un entier $m \geq 0$ tels que $A^{m+r} = A^m$. En déduire que, dans ces conditions, A est $r-$périodique *à partir de ce rang* m et que si de plus A est inversible, A est $r-$périodique.

e). Soit A une matrice déterministe inversible. Prouver que A^{-1} l'est aussi.

3. Etude de la suite (C_n) associée à une matrice A déterministe.

a). En utilisant les résultats de la partie II, établir le résultat suivant: soit A une matrice déterministe *inversible*, alors (C_n) converge vers une matrice stochastique C telle que $C^2 = C$.

b). Etendre ce résultat au cas où A est déterministe *non inversible*.

4. Matrices stochastiques inversibles.

Soient X et Y des éléments de S_p tels que $XY = I_p$. On se propose de montrer que X et Y sont déterministes inversibles.

a). Prouver que Y est une matrice inversible et que X l'est aussi.

b). On pose $X = (\alpha_{i,j})$, $Y = (\beta_{i,j})$ et, pour tout j compris entre 1 et p,

$$\mu_j = \max\{\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \ldots, \beta_{p,j}\}$$

Prouver que $\mu_j = 1$. Pour cela, on pourra calculer le coefficient $a_{j,j}(XY)$.

c). Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \beta_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j$. En déduire que tous les coefficients de Y sont égaux à 0 ou à 1.

d). Prouver que Y et X appartiennent à Δ_p.

e). Plus généralement, soient U et V deux matrices de S_p telles que le produit UV appartient à Δ_p. Prouver que U et V appartiennent à Δ_p. (On pourra utiliser le résultat de la question **III.2.e)**.)

FIN.