ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHEMATIQUES 2EME EPREUVE

OPTIONS : SCIENTIFIQUE - ECONOMIQUE - TECHNOLOGIQUE

EXERCICE N°1

Soient f et g les fonctions réelles définies par :

$$f(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

1. Étudier ces deux fonctions : domaines de définition, dérivées, tableaux de variation et études des branches infinies.

2. Étudier la position relative des deux courbes représentatives ; montrer en particulier que pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1[$, on a : $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

3. Construire dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et de g. (On prendra 4 cm comme unité sur chaque axe.)

4. Soit x un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

   a) Calculer $I(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

   b) Déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 1^-.

5. Pour tout entier naturel non nul n on pose :

$$a_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n\, e^{\frac{1}{12n}}$$

   a) Établir que pour un certain réel x que l'on déterminera, on a :

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{f(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \frac{1}{x}(f(x)-g(x))$$

b) En déduire que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ vérifiant : $0{,}39 < \ell < 0{,}4$.

On démontre et l'on admettra que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Déduire de ce qui précède un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N°2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 7 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer par la méthode du pivot de *Gauss* trois réels λ_1, λ_2, λ_3 vérifiant $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et tels que, pour $i = 1, 2, 3$, la matrice $A - \lambda_i I$ ne soit pas inversible.

2. On pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P dont la première ligne est constituée de 1 ou de 0, telle que :
$$A = P D P^{-1}.$$

3. a) Calculer P^{-1}.
   b) Soit n un entier naturel non nul. Expliciter la matrice $B_n = 4.\,A^{n-1}$.
   (On notera que cette matrice est à coefficients entiers.)

4. Dans un pays, il y a trois chaînes de télévision : la ❶, la ❷ et la ❸.
   * Si une personne regarde la ❶ un soir, elle choisit le lendemain la ❶, la ❷ ou la ❸ au hasard.
   * Si elle regarde la ❷, alors le lendemain elle reste fidèle à la ❷.
   * Si elle regarde la ❸, alors elle choisit le lendemain : la ❸ avec une probabilité 1/3, la ❶ avec une probabilité 1/12 et la ❷ avec une probabilité 7/12.

   Une personne achète un jour un poste de télévision et regarde ce soir-là une chaîne au hasard.

   On note p_n, q_n, r_n les probabilités pour que cette personne regarde la ❶, la ❷ ou la ❸ le n–ème soir.

   a) Montrer que : $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12^n} B_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ où B_n est la matrice calculée au 3. b).

   b) Déterminer les probabilités pour que cette personne regarde la ❶, la ❷ ou la ❸ le n–ème soir et les limites de ces probabilités lorsque $n \to +\infty$.