ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1996

Option scientifique

Mathématiques I

Vendredi 17 mai 1996 de 14h à 18h

Les calculatrices, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximal 21cm x 15cm sont autorisées.

Dans tout le problème, on désigne par n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et l'on considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ rapporté à sa base canonique.
On convient d'identifier un vecteur X de $\mathbf{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et l'on pose $N(X) = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.
De même, on identifie tout endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ à sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
Pour tout nombre réel θ appartenant à $[0, \pi]$, on considère la matrice réelle $A(\theta)$ d'ordre n définie par:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos\theta & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2\cos\theta & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(La diagonale est donc composée d'éléments égaux à $2\cos\theta$, la sous-diagonale et la sur-diagonale de -1 et tous les autres éléments de la matrice sont nuls).
Enfin, on convient de noter A la matrice $A(0)$ et I_n la matrice-identité d'ordre n.

Dans la partie I, on étudie les solutions de l'équation matricielle $AX = B$, où B est un vecteur donné de $\mathbf{R}^n$, et on majore $N(X)$ en fonction de $N(B)$.
Dans la partie II, on met en œuvre les résultats obtenus pour approcher une fonction définie comme solution d'une équation.

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales.
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat
affilié à la Chambre de Commerce et d'Industrie de Versailles - Val d'Oise -Yvelines, membre de la Fesic.

PARTIE I

1°) Etude de suites récurrentes linéaires.

On note $E(\theta)$ l'espace vectoriel des suites réelles (u_k) vérifiant pour tout entier k supérieur ou égal à 1 la relation: $u_{k+1} - 2\cos\theta u_k + u_{k-1} = 0$, et l'on désigne par $F(\theta)$ le sous-ensemble constitué des suites (u_k) de $E(\theta)$ telles que $u_o = 0$ et $u_{n+1} = 0$.

a) Expliciter une base de $E(\theta)$ en distinguant les trois cas $0 < \theta < \pi$, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
Déterminer la suite $(s_k(\theta))$ de $E(\theta)$ telle que $s_0(\theta) = 0$, $s_1(\theta) = \sin(\theta)$ lorsque $0 < \theta < \pi$.

b) Montrer que $F(\theta)$ est un sous-espace vectoriel de $E(\theta)$, puis déterminer $F(\theta)$ pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$.

c) On suppose $0 < \theta < \pi$. Montrer que $F(\theta)$ se réduit à la suite nulle si θ n'appartient pas à l'ensemble des réels de la forme $p\pi/(n+1)$, où p est un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

d) On suppose que $\theta = p\pi/(n+1)$, où p est un entier tel que $1 \leq p \leq n$.
Vérifier que la suite $(s_k(\theta))$ appartient à $F(\theta)$ et en déduire la dimension de $F(\theta)$.

2°) Noyau de la matrice $A(\theta)$.

a) Soit X un vecteur de composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

- A quelle condition sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ appartient-il au noyau de $A(\theta)$?
- En déduire qu'un vecteur X appartient au noyau de $A(\theta)$ si et seulement s'il existe une suite (u_k) appartenant à $F(\theta)$ telle que $u_1 = x_1, u_2 = x_2, \ldots, u_n = x_n$.

b) En déduire le noyau de $A(\theta)$ en fonction des valeurs prises par θ dans $[0, \pi]$.
Pour quelles valeurs de θ dans $[0, \pi]$ la matrice $A(\theta)$ est-elle inversible?

3°) Valeurs propres de la matrice A.

a) Expliciter la matrice $A = A(0)$, et montrer que ses valeurs propres sont réelles (on citera précisément le théorème utilisé).

b) Soit λ une valeur propre de la matrice A, et X un vecteur propre non nul associé. Expliciter le système d'équations $(A - \lambda I_n)X = 0$ puis, en considérant la $i^{ième}$ équation de ce système, où i est un entier tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$, montrer que $|\lambda - 2| \leq 2$.
En déduire que, pour toute valeur propre λ de A, existe un nombre réel θ appartenant à $[0, \pi]$ tel que $\lambda = 2(1-\cos\theta)$.

c) En déduire que A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que l'on explicitera sous la forme $\lambda_p = 2(1-\cos\theta_p)$, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$.

4°) Vecteurs propres de la matrice A.

a) Expliciter le vecteur propre X_p associé à la valeur propre λ_p dont la première composante dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est égale à $\sin(p\pi/(n+1))$.

b) On considère deux entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$.
Montrer que ${}^tX_pAX_q = {}^tX_qAX_p$ (où ${}^tX$ désigne la transposée de la matrice-colonne X), puis, en évaluant les deux membres de cette égalité, prouver que ${}^tX_p X_q = 0$.

c) Calculer, pour $0 < \theta < \pi$, la somme $1 + e^{2i\theta} + e^{4i\theta} + \ldots + e^{2in\theta}$.
En déduire que la somme des carrés des composantes du vecteur X_p, où $1 \leq p \leq n$, est égale à $(n+1)/2$.

d) On note P la matrice d'ordre n dont les vecteurs-colonnes sont $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Montrer que la matrice P est symétrique et, à l'aide des résultats précédents, calculer P^2, puis en déduire l'expression de P^{-1} en fonction de P. Que vaut le produit $P^{-1}AP$?

5°) Etude de l'équation AX = B.

On donne un vecteur B de composantes $b_1, b_2, \dots, b_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

a) Etablir que l'équation AX = B admet une solution X et une seule.

b) Soient dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ les vecteurs V de composantes 1, 1, ... , 1 et W de composantes $w_1, w_2, \dots, w_n$, où W vérifie l'équation AW = V.

Montrer que les composantes de W sont données par $w_k = k(n+1-k)/2$, où $1 \leq k \leq n$.

En déterminant le maximum sur [0, a] de la fonction $x \to x(a-x)$ (où a est un nombre réel strictement positif donné), établir que $N(W) \leq (n+1)^2/8$.

c) On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que les réels $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont positifs et l'on note X la solution unique de l'équation AX = B.

- Soit i le plus grand indice tel que $x_i = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

En raisonnant par l'absurde, montrer, par considération de la $i^{\text{ème}}$ ligne du système d'équations AX = B, que i = 1 ou n.

- Montrer que les composantes de X sont toutes positives.

d) On pose Y = N(B)V - B et Z = N(B)V + B.

Déterminer le signe des composantes de Y et Z, puis en déduire que, si AX = B, on a pour $1 \leq k \leq n$: $|x_k| \leq N(B)w_k$

En déduire une majoration de N(X) en fonction de N(B) et de n.

PARTIE II

Etant donnés deux nombres réels a et b et une fonction g à valeurs réelles continue sur le segment [0, 1], on considère la fonction f de classe C^2 sur [0, 1] et vérifiant les trois conditions suivantes:

$$f(0) = a,\ f(1) = b \text{ et, pour tout élément x de } [0, 1],\ f''(x) = g(x).$$

On se propose ici de déterminer des valeurs numériques approchées de f(x) où x désigne un nombre réel appartenant au segment [0, 1].

1°) Existence et unicité de la solution f.

a) Expliciter la dérivée seconde de la fonction L définie sur [0, 1] par:

$$L(x) = x\int_x^1 (t-1).g(t)dt + (x-1)\int_0^x t.g(t)dt.$$

b) En déduire l'existence et l'unicité d'une fonction f de classe C^2 sur [0, 1] et vérifiant les trois conditions suivantes:

$$f(0) = a,\ f(1) = b \text{ et, pour tout réel x appartenant à } [0, 1],\ f''(x) = g(x).$$

Exprimer f en fonction de L.

2°) Approximation de f'' par différences finies.

Dans toute la suite du problème, on suppose la fonction g de classe C^2 sur [0, 1].

a) Etablir que la fonction f est de classe C^4 sur [0, 1].

b) On donne un nombre réel x dans]0, 1[et un nombre réel strictement positif h tel que $0 \leq x-h < x+h \leq 1$. Etablir à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à partir du point x sur les segments [x, x+h] et [x-h, x] que:

$$\left|\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} - f''(x)\right| \leq \frac{M_2h^2}{12}$$

où M_2 désigne le maximum (dont on justifiera l'existence) de $|g''|$ sur [0, 1].

Dans la suite, on convient donc d'approcher f''(x) par $[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]/h^2$.

3°) <u>Discrétisation de l'équation $f'' = g$, avec $f(0) = a$ et $f(1) = b$.</u>
On pose désormais $h = 1/(n+1)$ et l'on note $x_k = kh$ pour $0 \leq k \leq n+1$.
On se propose de calculer des approximations $y_1, y_2, \dots, y_n$ de $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, en prenant bien entendu $y_0 = f(x_0) = a$ et $y_{n+1} = f(x_{n+1}) = b$.
A cet effet, on remplace les n équations $f''(x_k) = g(x_k)$ où $1 \leq k \leq n$ par les n équations:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = g(x_k).$$

a) Montrer que le vecteur Y de composantes $y_1, y_2, \dots, y_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est solution d'un système d'équations $AX = B$ où B est un vecteur dont on précisera les composantes.
b) Etablir que le vecteur F de composantes $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ vérifie $N[A(F-Y)] \leq M_2h^4/12$.
c) A l'aide des résultats de la partie I, en déduire en fonction de n et de M_2 une majoration de $N(F-Y)$, erreur maximale commise en remplaçant $f(x_k)$ par y_k.

4°) <u>Applications.</u>
a) En déduire que, si $g'' = 0$, alors $y_k = f(x_k)$ pour $1 \leq k \leq n$.
b) Préciser f lorsque $g(x) = 1$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $a = b = 0$.
Retrouver ainsi le résultat de la question I.5.b).
c) Déterminer la solution du système d'équations $AX = B$ lorsque B est le vecteur de composantes $1, 2, \dots, n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

***