ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1996

Option économique

Mathématiques II

Vendredi 10 mai 1996 de 8h à 12h

Les calculatrices, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximal 21cm x 15cm sont autorisées.

Le problème a pour but l'étude d'un jeu, dont la description et l'analyse font l'objet de la partie II. Dans la partie I sont établis quelques résultats préliminaires utilisés ensuite.

PARTIE I

On considère dans cette partie une suite (p_n) de nombres réels positifs telle que la série Σp_n converge. On définit pour $0 \leq t \leq 1$ la fonction génératrice F de cette suite (p_n) par:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j.$$

1°) Etude de la fonction F sur [0, 1].

a) Montrer que, pour $0 \leq t \leq 1$, la suite $n \to p_o + p_1 t + \ldots + p_n t^n$ est croissante majorée. En déduire que la série définissant F(t) est convergente pour $0 \leq t \leq 1$.

b) Montrer que F est une fonction croissante sur [0, 1].

2°) Etude locale de la fonction F en 1.

a) Déduire de la question précédente que F(t) admet une limite lorsque le nombre réel t tend vers 1 à gauche (on précisera le théorème utilisé), et établir successivement que:

- pour nombre réel t tel que $0 \leq t < 1$ et tout nombre entier naturel n:

$$0 \leq F(1) - F(t) \leq \sum_{j=0}^{n} p_j (1 - t^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

- pour tout nombre entier naturel n:

$$0 \leq F(1) - \lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} F(t) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

- En déduire, en faisant tendre n vers $+\infty$, la continuité à gauche de F en 1.

b) Etablir pour tout nombre réel t de [0, 1[:

$$\frac{F(t)-F(1)}{t-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+ \cdots +t^{j-1}).$$

En déduire que la fonction $t \to [F(t)-F(1)]/(t-1)$ est croissante sur [0, 1[.
c) On suppose dans cette question la série $\sum jp_j$ convergente.
Montrer que la fonction $t \to [F(t)-F(1)]/(t-1)$ est alors majorée sur [0, 1[.
En déduire qu'elle admet une limite quand t tend vers 1 à gauche et que la fonction F est dérivable en 1, puis montrer que:

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j .$$

d) On suppose dans cette question la fonction F dérivable en 1.
Montrer pour tout nombre réel t de [0, 1[et tout nombre entier naturel $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+ \ldots +t^{j-1}) \leq \frac{F(t)-F(1)}{t-1}.$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n \leq F'(1)$, puis établir que la série $\sum jp_j$ est convergente et comparer sa somme à F'(1).
e) Déduire de ces résultats que F est dérivable en 1 si et seulement si la série $\sum jp_j$ est convergente, et que sa somme est alors égale à F'(1).
f) *Application:* pour tout entier naturel n, on suppose que p_n est la probabilité pour qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ prenne la valeur n.
A quelle condition nécessaire et suffisante sur la fonction F la variable aléatoire X admet-elle une espérance mathématique? Comparer alors celle-ci à F'(1).

3°) <u>Produit de deux fonctions génératrices.</u>
On considère deux suites (p_n), (q_n) de nombres positifs telles que les séries $\sum p_n$, $\sum q_n$ convergent, et l'on pose $r_n = p_0q_n + \ldots + p_iq_{n-i} + \ldots + p_nq_0$ pour tout entier naturel n
a) Etablir pour tout entier naturel n la majoration suivante:

$$\sum_{j=0}^{n} r_j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j \cdot \sum_{j=0}^{n} q_j .$$

En déduire la convergence de la série $\sum r_n$.
b) On pose alors pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle [0, 1]:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j \ , \ G(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j t^j \ , \ H(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j.$$

Prouver que l'on a pour tout nombre réel t de [0, 1] et tout nombre entier naturel n:

$$\sum_{j=0}^{n} r_j t^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j t^j . \sum_{j=0}^{n} q_j t^j \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j.$$

En déduire l'égalité $F(t).G(t) = H(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

PARTIE II

Dans toute cette partie, on considère une pièce dont la probabilité de donner Face est égale à p (où p désigne un nombre réel tel que $0 < p < 1$).

On propose le jeu suivant à un individu muni d'un capital initial de K francs (où K désigne un nombre entier naturel non nul):

- Il lance la pièce:
  - si celle-ci donne Face, il gagne 1 franc et son capital devient égal à K+1 francs.
  - si celle-ci donne Pile, il perd 1 franc et son capital devient égal à K-1 francs.

A l'issue de ceci, si son capital est nul, il est déclaré ruiné et le jeu cesse définitivement.

- Sinon, il recommence (muni de son nouveau capital) la même expérience aléatoire et dans les mêmes conditions, et il poursuit ainsi tant qu'il n'est pas ruiné.

On désigne alors par:

- R_K l'événement "le joueur, muni d'un capital initial de K francs, est ruiné à l'issue de l'un des jets de la pièce".
- $p_n(K)$ la probabilité pour que le joueur, muni d'un capital initial de K francs, soit ruiné à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jet de la pièce. Par convention, on pose $p_0(K) = 0$.
- $t \rightarrow F_K(t)$ la fonction génératrice de cette suite $(p_n(K))$, définie pour $0 \leq t \leq 1$ par:

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K)t^n.$$

On vérifiera que la probabilité $P(R_K)$ de l'événement R_K est égale à la somme de la série $\sum p_n(K)$ (qui est donc convergente), et que $P(R_K) = F_K(1)$.

II.1 Etude du cas particulier K = 1.

Dans cette partie, on étudie le jeu en supposant le capital initial du joueur égal à 1 franc.

1°) Etude de la probabilité de ruine du joueur.

a) Calculer $p_1(1)$, $p_2(1)$ et $p_3(1)$.

b) Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{\text{ième}}$ jet de la pièce si et seulement s'il existe un entier j ($1 \leq j \leq n-1$) tel que:

- à l'issue du premier jet de la pièce, le capital du joueur est égal à 2 francs.
- àl'issue des j jets suivants de la pièce, le capital du joueur revient, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 1 franc.
- à l'issue des n-j jets suivants de la pièce, le capital du joueur arrive, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 0 franc et il est donc alors ruiné.

Exprimer en fonction de p et des éléments de la suite $(p_n(1))$ les probabilités des trois événements précédents, puis établir la formule suivante (on rappelle que $p_0(1) = 0$):

$$p\sum_{j=0}^{n} p_j(1)p_{n-j}(1) = \begin{cases} p_{n+1}(1) & \text{si } n \geq 2. \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

c) En multipliant par t^{n+1} l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 0$, établir à l'aide des résultats de I.3 la relation $pt\,[F_1(t)]^2 = F_1(t) - (1-p)t$ pour $0 \leq t \leq 1$.

d) Etudier les variations de la fonction $t \to 1-4p(1-p)t^2$ sur l'intervalle $]0, 1[$, et montrer que $1-4p(1-p)t^2 > (1-2p)^2$ pour $0 < t < 1$.
En déduire que, pour $0 < t < 1$, l'équation du second degré $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$ possède deux racines réelles distinctes $x'(t)$ et $x''(t)$ (on supposera $x'(t) < x''(t)$).
Pour tout nombre réel t appartenant à $]0, 1[$, montrer que $x''(t) > 1$ puis, en remarquant que $F_1(t) \leq 1$, en déduire $F_1(t)$ en fonction de p et t pour $0 < t < 1$.
e) En faisant tendre t vers 1, déterminer $F_1(1)$ puis en déduire la probabilité $P(R_1)$ de la ruine du joueur en distinguant les deux cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$.

2°) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq 1/2$.
Pour $p < 1/2$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_1 et des résultats de I.2 l'espérance de la variable aléatoire X_1 indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = 1/2$?

II.2 Etude du cas général.

1°) Etude de la probabilité de ruine du joueur.
a)Le premier jet de la pièce donne Face ou Pile, événements notés ici F_1 ou P_1.
A l'aide du système complet d'événements $\{F_1, P_1\}$, établir la relation suivante pour $n \geq 2$:

$$p_n(1) = pp_{n-1}(2).$$

En multipliant par t^n l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 2$, établir la relation $F_1(t) = ptF_2(t) + (1-p)t$ pour $0 \leq t \leq 1$, puis en déduire que $F_2(t) = [F_1(t)]^2$.
b) On suppose ici $K \geq 2$. En raisonnant de même, établir la formule suivante:

$$p_n(K) = \begin{cases} pp_{n-1}(K+1) + (1-p)p_{n-1}(K-1) & \text{si } n \geq 1. \\ 0 \quad \text{si } n = 0. \end{cases}$$

En déduire l'expression de $F_K(t)$ en fonction de p, t, $F_{K+1}(t)$ et $F_{K-1}(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.
En étudiant alors la suite $K \to u_K = F_K(t)$, exprimer $F_K(t)$ en fonction de p, K et t.
c) Déterminer $F_K(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_K)$ de la ruine du joueur, en distinguant les deux cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$.

2°) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq 1/2$.
Pour $p < 1/2$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_K et des résultats de I.2 l'espérance de la variable aléatoire X_K indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = 1/2$?