ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1996

Option économique

Mathématiques III

Vendredi 17 mai 1996 de 14h à 18h

Les calculatrices, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximal 21cm x 15cm sont autorisées.

PROBLEME 1: Analyse.

On considère dans tout ce problème une application f à valeurs réelles et de classe C^3 sur un segment [a, b]. On se propose d'étudier quelques algorithmes de calcul approché de l'intégrale:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

A cet effet, étant donné un nombre entier naturel $n \geq 1$, on subdivise le segment [a, b] en n sous-segments de même longueur (b-a)/n, dont les extrémités sont respectivement notées $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ avec $x_k = a + k(b-a)/n$, où $0 \leq k \leq n$. Dans toute la suite, on désigne par $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans le segment [a, b].

1°) Evaluation de I(f) à l'aide de la méthode des rectangles.

On considère les deux sommes suivantes:

$$G_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad ; \quad D_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

a) On note M_1 le maximum de $|f'(x)|$ lorsque x décrit [a, b] (on justifiera son existence). Soient les deux fonctions u et v définies sur le segment $[\alpha, \beta]$ par:

$$\begin{cases} u(x) = \int_\alpha^x f(t)dt - (x-\alpha)f(\alpha) - M_1\dfrac{(x-\alpha)^2}{2}. \\ v(x) = \int_\alpha^x f(t)dt - (x-\alpha)f(\alpha) + M_1\dfrac{(x-\alpha)^2}{2}. \end{cases}$$

Calculer u'(x), u''(x) et en déduire les variations des fonctions u' et u.
Procéder de même pour l'étude de la fonction v.

b) Déduire de ces résultats que:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt-(\beta-\alpha)f(\alpha)\right| \leq \frac{M_1(\beta-\alpha)^2}{2}.$$

c) En appliquant l'inégalité précédente avec $[\alpha, \beta] = [x_k, x_{k+1}]$, puis en sommant les inégalités obtenues pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, établir que:

$$\left|\int_a^b f(t)dt-G_n\right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$$

On établit de façon analogue l'inégalité suivante:

$$\left|\int_a^b f(t)dt-D_n\right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$$

2°) Evaluation de $I(f)$ à l'aide de la méthode des trapèzes.
On considère maintenant la demi-somme $T_n = (G_n + D_n)/2$.
a) On note M_2 le maximum de $|f''(x)|$ lorsque x décrit $[a, b]$ (on justifiera son existence). En calculant à l'aide d'intégrations par parties l'intégrale sur le segment $[\alpha, \beta]$ de la fonction $t \to (t - \alpha)(t - \beta)f''(t)$, établir l'inégalité suivante:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt-\frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))\right| \leq \frac{M_2(\beta-\alpha)^3}{12}.$$

b) En appliquant l'inégalité précédente avec $[\alpha, \beta] = [x_k, x_{k+1}]$, puis en sommant les inégalités obtenues pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, quelle majoration de $\left|\int_a^b f(t)dt-T_n\right|$ obtient-on?

3°) Etude d'un exemple.
a) Ecrire en PASCAL un algorithme de calcul des sommes G_n, D_n, T_n, les réels a et b, la fonction f et l'entier n étant supposés donnés.
b) On suppose dans cette question $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = 4/(1+x^2)$.
- En posant $x = \tan\theta$, calculer la valeur de l'intégrale de f sur $[0, 1]$.
- A l'aide de l'algorithme précédent, calculer des valeurs approchées de G_n, D_n, T_n pour $n = 5$, 10 et 20.
- Préciser de plus les valeurs de $S_5 = (4T_{10} - T_5)/3$ et $S_{10} = (4T_{20} - T_{10})/3$.

4°) Développement limité de T_n et accélération de convergence.
On considère dans cette question quatre fonctions-polynômes définies par $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - (\alpha+\beta)/2$, P_2 et P_3 étant telles que:

$$P_2' = P_1 \;,\; P_3' = P_2 \;,\; P_3(\alpha) = P_3(\beta) = 0.$$

a) Déterminer les fonctions-polynômes P_2 et P_3.
b) Etudier les variations de la fonction P_2 sur $[\alpha, \beta]$ et préciser le maximum de $|P_2(x)|$ lorsque x décrit $[\alpha, \beta]$.
En déduire à l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à P_3 sur $[\alpha, t]$ que, pour tout nombre réel t appartenant à $[\alpha, \beta]$, on a $|P_3(t)| \leq (\beta-\alpha)^3/12$.
c) On note M_3 le maximum de $|f'''(x)|$ lorsque x décrit $[a, b]$ (on justifiera son existence).

En calculant à l'aide d'intégrations par parties l'intégrale sur le segment $[\alpha, \beta]$ de la fonction $t \to P_3(t)f'''(t)$, établir l'inégalité suivante:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt-\frac{\beta-\alpha}{2}(f(\beta)+f(\alpha))+\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}(f'(\beta)-f'(\alpha))\right| \leq \frac{M_3(\beta-\alpha)^4}{12}.$$

d) En appliquant l'inégalité précédente avec $[\alpha, \beta] = [x_k, x_{k+1}]$, puis en sommant les inégalités obtenues pour $k = 0, 1, \dots, n-1$, établir que le développement limité à la précision $1/n^2$ de T_n est:

$$T_n = \int_a^b f(t)dt + \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b) - f'(a)) + \frac{\varepsilon_n}{n^2} \quad \text{avec} \quad \lim \varepsilon_n = 0.$$

e) Calculer $G_n - D_n$ et déterminer les expressions de G_n et D_n en fonction de T_n, puis en déduire les développements limités à la précision $1/n^2$ de G_n, D_n et $S_n = (4T_{2n} - T_n)/3$.

PROBLEME 2: Algèbre.

Dans tout le problème, on désigne par n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et l'on considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ rapporté à sa base canonique.

On convient d'identifier tout vecteur X de $\mathbf{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Pour tout nombre réel m, on considère la matrice réelle A(m) d'ordre n définie par:

$$A(m) = \begin{bmatrix} -m & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -m & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -m & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -m \end{bmatrix}.$$

1°) <u>Etude de l'inversibilité de A(m) pour $|m| \geq 2$.</u>

a) On suppose qu'il existe un vecteur X non nul de $\mathbf{R}^n$ tel que $A(m)X = 0$ et l'on note i le plus petit indice appartenant à $\{1, 2, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.

- Prouver que, si $i = 1$, alors $|m| \leq 1$.
- Démontrer un résultat analogue si $i = n$.
- Prouver que, si $2 \leq i \leq n-1$, alors $|m| < 2$.

b) En déduire l'inversibilité de la matrice A(m) pour $|m| \geq 2$.

2°) <u>Etude de l'inversibilité de A(m) pour $|m| < 2$.</u>

On suppose dans cette question que le nombre réel m appartient à $]-2, +2[$. Il existe donc un unique nombre réel θ appartenant à $]0, \pi[$ tel que $m = 2\cos\theta$ et l'on note alors S le vecteur de composantes $(\sin\theta, \sin 2\theta, \dots, \sin n\theta)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

a) Calculer les composantes du vecteur A(m)S en utilisant la formule suivante:

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b).$$

b) En déduire n nombres réels $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \pi$ tels que $A(2\cos\theta_k)$ ne soit pas inversible $(1 \leq k \leq n)$.

En déduire quelles sont les valeurs propres de A(0).

c) Montrer que les uniques valeurs de m pour lesquelles A(m) n'est pas inversible sont $m_1 = 2\cos\theta_1$, $m_2 = 2\cos\theta_2$, ... $m_n = 2\cos\theta_n$.

3°) <u>Diagonalisation de A(m).</u>

a) La matrice A(0) est-elle diagonalisable? (on citera le théorème utilisé).

b) Former une matrice P telle que $P^{-1}.A(0).P$ soit égale à une matrice diagonale D dont on précisera les éléments.

c) Plus généralement, la matrice A(m) est-elle diagonalisable? Que vaut $P^{-1}.A(m).P$?