ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1996

Option technologique

EXERCICE 1

Un locataire décide d'occuper un appartement à partir du 1er Janvier 1997, et a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est fixé à 48000F et le locataire s'engage à occuper l'appartement pendant 9 années complètes.

1°) Contrat n°1.
Le locataire accepte une augmentation annuelle de 3% du loyer de l'année précédente.
a) Calculer le loyer u_2 payé la deuxième année de location.
b) Exprimer le loyer u_n payé la $n^{ième}$ année de location en fonction de n.
En particulier, que vaut u_9?
c) Calculer la somme totale payée par le locataire à l'issue des 9 années de contrat.

2°) Contrat n°2.
Le locataire accepte une augmentation annuelle de 1500F du loyer de l'année précédente.
a) Calculer le loyer v_2 payé la deuxième année de location.
b) Exprimer le loyer v_n payé la $n^{ième}$ année de location en fonction de n.
En particulier, que vaut v_9?
c) Calculer la somme totale payée par le locataire à l'issue des 9 années de contrat.

3°) Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire?

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n, on désigne par I_n l'intégrale définie par:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

1°) On se propose d'étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.
a) Etudier les variations de f et préciser ses limites en $-\infty$ et $+\infty$
b) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité = 4cm).
c) Calculer l'intégrale I_1, et indiquer quelle est sa signification géométrique.

2°) On se propose d'étudier la suite (I_n).
a) Etablir que, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1], on a: $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$, puis prouver l'encadrement suivant:

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, établir que $(n+1)I_n = 1 + I_{n+1}$.
En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3°) On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = n!\,e - I_n$, dans le but d'établir que le nombre réel e n'est pas rationnel.
a) Calculer u_1, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, puis en déduire par récurrence que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, u_n est un nombre entier.
b) Déduire de l'encadrement obtenu en 2.a) que le nombre $n!\,e = u_n + I_n$ n'est pas entier.
c) On suppose qu'il existe des entiers p, q strictement positifs tels que $e = p/q$.
Montrer que, pour $n \geq q$, le nombre $n!p/q$ est entier, et, à l'aide de la question précédente, en déduire une contradiction.
En déduire que le nombre e n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

EXERCICE 3

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle deux dés équilibrés, et jouent de la façon suivante:
- A lance une première fois les deux dés. Si la somme des deux chiffres obtenus est égale à 6, il est déclaré gagnant et le jeu cesse.
- Sinon, B lance une première fois les deux dés. Si la somme des deux chiffres obtenus est égale à 7, il est déclaré gagnant et le jeu cesse.
- Sinon, A lance une deuxième fois les deux dés. Si la somme des deux chiffres obtenus est égale à 6, il est déclaré gagnant et le jeu cesse.
- Sinon, B lance une deuxième fois les deux dés. Si la somme des deux chiffres obtenus est égale à 7, il est déclaré gagnant et le jeu cesse.

Et l'on continue ainsi jusqu'à ce que A ou B gagne.

1°) On lance deux dés équilibrés.
a) Quelle est la probabilité pour que la somme des chiffres obtenus soit égale à 6?
b) Quelle est la probabilité pour que la somme des chiffres obtenus soit égale à 7?

2°) On détermine les probabilités p_n, q_n des événements A_n, B_n définis par:
A_n = "A gagne la partie lorsque, pour la $n^{\text{ième}}$ fois, il lance les deux dés."
B_n = "B gagne la partie lorsque, pour la $n^{\text{ième}}$ fois, il lance les deux dés."
a) Calculer la probabilité des événements A_1, B_1, A_2, B_2.
b) Calculer les probabilités p_n, q_n des événements A_n, B_n.

3°) On détermine la probabilité pour que A gagne le jeu, puis pour que B gagne le jeu.
a) Déterminer les sommes des deux séries suivantes:
$$p = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \quad ; \quad q = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n .$$
Vérifier que $p+q = 1$.
b) En déduire la probabilité pour que A gagne le jeu, puis pour que B gagne le jeu.

4°) On étudie la durée moyenne du jeu. A cet effet, on introduit la variable aléatoire N égale à n si c'est à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jet des deux dés que le jeu cesse.
a) Vérifier l'égalité des événements $N = 1$ et A_1, $N = 2$ et B_1, $N = 3$ et A_2, $N = 4$ et B_2.
Comparer plus généralement les événements $N = 2n-1$ et A_n et $N = 2n$ et B_n.
b) En déduire la loi de probabilité, l'espérance, la variance de la variable aléatoire N.