ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

MATHÉMATIQUES

Année 1997

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à deux. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note id_E l'application identique de E dans lui-même. Lorsque x et y sont deux vecteurs de E, le produit scalaire de x par y s'écrit $< x,y >$ et $\|x\|$ représente la norme de x. Quand u est un vecteur *non nul* de E, on définit l'application φ_u de E dans lui-même par

$$\forall x \in E \quad \varphi_u(x) = 2\frac{< x,u >}{< u,u >}u - x$$

1. Montrer que φ_u est un endomorphisme involutif de E (c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $\varphi_u \circ \varphi_u = id_E$).
2. Démontrer que u est un vecteur propre de φ_u associé à une valeur propre que l'on précisera.
3. Etablir que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que

$$\forall (x_1,x_2) \in E^2 \quad < \varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2) >=< x_1,x_2 >$$

   En déduire que φ_u conserve la norme, c'est-à-dire que

$$\forall x \in E \quad \|\varphi_u(x)\| = \|x\|$$

4. On désigne par $\mathcal{D}_u$ la droite vectorielle de base u, et par $\mathcal{H}_u$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à u (autrement dit, $\mathcal{H}_u = \mathcal{D}_u^\perp$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_u$).
   (a) Montrer que $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u.
   (b) φ_u est-il diagonalisable?
   (c) t étant un réel non nul, comparer les applications φ_u et φ_{tu}.
5. *Etude d'une réciproque.* On suppose que ψ est un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant

$$\forall y \in \Delta \quad \psi(y) = y \text{ et } \forall z \in \Delta^\perp \quad \psi(z) = -z$$

   (a) Montrer que ψ est involutif et conserve le produit scalaire.
   (b) Etablir qu'il existe au moins un vecteur u non nul de Δ tel que l'on ait : $\psi = \varphi_u$.
   (c) Soit $\mathcal{M}$ la matrice de ψ dans une base orthonormale $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E. Soit $a_{i,j}$ (où i et j désignent des entiers compris entre 1 et n) le coefficient de la i-ième ligne et j-ième colonne de la matrice ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M}$. Montrer que $a_{i,j} = scalv\psi(e_i)\psi(e_j)$.En déduire que : ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_n$. où I_n désigne la matrice unité d'ordre n.

Exercice 2

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times \quad f(x) = x^x$$

   et la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$$

   (a) Montrer que l'intégrale : $I = \int_0^1 f(t)t$ converge (ici, on ne demande pas de la calculer).
   (b) Etudier la nature de la série de terme général u_n.
2. Soit trois entiers naturels n, p et k ; on pose

$$J_n = \int_0^1 (x\ln x)^n x \text{ et } K_{p,k} = \int_0^1 x^p(\ln x)^k x$$

(a) Montrer que J_n et $K_{p,k}$ existent (on distinguera les cas $p=0$ et $p \neq 0$).
(b) Pour k différent de zéro, déterminer une relation entre $K_{p,k}$ et $K_{p,k-1}$.
(c) En déduire la valeur de J_n en fonction de n.

3.

(a) Donner, sur $]0,1]$, un majorant de la fonction qui à x associe $|x \ln x|$.
(b) Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à deux

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} J_k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{e^{n+1}}$$

(On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle)
(c) En déduire que : $I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$.
(d) Calculer avec une précision d'au moins 2×10^{-7} une valeur approchée de I.

Problème

Le but de ce problème (dont les trois parties sont indépendantes) est l'étude du temps passé dans une mairie par un usager quand un ou plusieurs guichets sont à la disposition du public, et que plusieurs personnes se présentent en même temps. On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités de probabilités respectives f et g, $X+Y$ admet pour densité de probabilité la fonction h définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)x$$

A moins d'une mention explicite du contraire dans l'énoncé, X étant une variable aléatoire à densité, on désignera par F_X sa fonction de répartition, et par f_X une fonction densité de probabilité de X.

Partie I Etude de deux guichets

Dans cette partie, il y a deux guichets à la disposition du public. Trois personnes A_1, A_2 et A_3 entrent en même temps dans la salle. A l'instant $t=0$, A_1 et A_2 s'adressent simultanément aux deux guichets. A_3 attend et s'adressera au premier guichet libéré, soit par A_1, soit par A_2.

On suppose que :

• la durée de passage au guichet de A_i ($i = 1{,}2$ ou 3) est une variable aléatoire X_i qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}1]$;

• les variables aléatoires X_1,X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes;

• la durée du changement de personne à chaque guichet peut être considérée comme nulle.

1. **Etude d'un évènement.**
On se propose de calculer la probabilité de l'événement E : "A_3 quitte la mairie en dernier".

(a) Montrer que la variable X'_2 définie par $X'_2 = -X_2$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1{,}0]$.
(b) On admet l'indépendance de X_1 et X'_2.
Calculer une densité de probabilité φ_1 de la variable Y_1, définie par : $Y_1 = X_1 - X_2$.
On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty,-1[$, $]-1{,}0[$, $]0{,}1[$ et $]1,+\infty[$.
En déduire Φ_1, fonction de répartition de Y_1.
(c) Calculer la fonction de répartition, Φ_2, de la variable Z_1, définie par $Z_1 = |Y_1|$. En déduire une densité de probabilité, φ_2, de Z_1.
(d) On admet l'indépendance de Z_1 et $-X_3$.

i. Calculer une densité de probabilité, φ_3, de la variable $Z_1 - X_3$. On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty,-1[$, $]-1{,}0[$, $]0{,}1[$ et $]1,+\infty[$.

ii. En déduire la probabilité de l'événement $(Z_1 - X_3 \leq 0)$. Quelle est la probabilité de E?

2. **Etude d'une variable aléatoire.**
   On pose : $T_3 = \inf(X_1,X_2) + X_3$.
   (a) Que représente T_3 pour A_3?
   (b) Calculer la fonction de répartition, F, de $\inf(X_1,X_2)$.
   En déduire une densité de probabilité, f, de cette variable aléatoire. Que remarque-t-on?
   (c) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 2t - t^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (t-2)^2 & \text{si} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant 2 \end{cases}$$

   est une densité de probabilité de T_3. En déduire l'espérance mathématique et la variance de T_3.

Partie 2 Etude de n guichets

Dans cette partie, n guichets sont ouverts au public. n personnes A_1, $A_2, \ldots, A_n$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$ et s'adressent à l'un des guichets (les n guichets sont donc tous occupés à l'instant $t = 0$).

On suppose que :

• la durée de passage au guichet de A_i $(1 \leq i \leq n)$ est une variable aléatoire X_i qui suit la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné ;

• les variables aléatoires X_1, $X_2, \ldots X_n$ sont mutuellement indépendantes.

1. On désigne par U_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la première*, terminé sa démarche administrative.
2. Déterminer la loi de U_n. Quelle loi reconnaît-on? Donner son espérance mathématique et sa variance.
   On note V_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la dernière*, terminé sa démarche administrative.
   Déterminer la fonction de répartition de V_n. En déduire une de ses densités de probabilité, et montrer que son espérance mathématique est donnée par

$$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1}$$

3. Soit t un réel strictement positif. On désigne par W_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant terminé leur démarche administrative à l'instant t. Donner la loi de W_t ainsi que son espérance mathématique.

Partie 3 Etude d'un guichet

Dans cette partie, un seul guichet est ouvert au public. Sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},P)$, on se donne une suite $N,X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que les variables X_i $(i \in \mathbb{N}^\times)$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné, et que N suit la loi géométrique de paramètre p (où p désigne un élément de l'intervalle $]0,1[$).

N personnes $A_1,A_2,\ldots,A_N$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$, et font donc la queue, dans cet ordre, devant ce guichet.

On suppose que, pour tout entier naturel i non nul, la durée de passage au guichet de A_i est donnée par la variable aléatoire X_i. On pose :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

ce qui signifie que

$$\forall \omega \in \Omega \quad S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

Par exemple

- Si $N(\omega) = 2$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$
- Si $N(\omega) = 4$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega) + X_4(\omega)$

Ainsi, S, qui est la somme d'un nombre aléatoire de variables X_i, apparaît comme étant le temps total passé à la mairie par la personne qui termine en dernier sa démarche administrative.

1. Soit n un entier naturel non nul fixé. Rappeler la formule donnant une densité de probabilité de la variable aléatoire $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
2. Soit x un réel strictement positif.

   (a) Exprimer, à l'aide d'une intégrale dont le calcul explicite (bien que possible) n'est pas demandé, la probabilité que l'événement $(S \leq x)$ soit réalisé sachant que l'événement $(N = n)$ l'est.

   (b) En déduire la fonction de répartition de S (on admettra qu'il est possible de permuter les deux symboles $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$ et $\int\limits_{0}^{x}$ que l'on rencontrera au cours du calcul).
   Donner une densité de probabilité de S.
   Reconnaître la loi de S.

   (c) Montrer que $E(S) = E(X_i)E(N)$.