# edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

**ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD**

Concours d'admission sur classes préparatoires

## MATHEMATIQUES

Option scientifique

**Mardi 6 mai 1997, de 8h à 12h**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

**Seules sont autorisées :**

*Une règle graduée.*
*Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.*

**EXERCICE 1**

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $\Delta$ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Delta(f) = g$, définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1) Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de E.

2) a. Vérifier que, pour toute fonction f de E, $\Delta(f)$ est dérivable.

b. En déduire que $\Delta$ n'est pas surjective.

3) Montrer que $\Delta$ est injective.

4) On suppose, *dans cette question*, que $\Delta$ possède une valeur propre $\lambda$ non nulle et on désigne par f un vecteur propre associé à $\lambda$.

a. Montrer que la fonction h, définie pour tout réel x, par $h(x) = f(x)\, e^{-\frac{x}{\lambda}}$, est constante.

b. Déterminer alors $\Delta(f)$.

5) Conclure à l'aide des questions précédentes que $\Delta$ n'a aucune valeur propre.

6) Pour toute fonction f de E, on pose : $F_0 = \Delta(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \Delta(F_{n-1})$.

a. Montrer que $F_n$ est de classe $C^{n+1}$.

b. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt$.

**EXERCICE 2**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.

1) On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(t) = \dfrac{\sin t - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0. \\ g(0) = 0. \end{cases}$

a. Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que : $\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} g(t)\,dt = 0$.

c. En déduire que f est continue en 0.

2) Montrer que f est paire.

3) a. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

b. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x non nul.

c. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4) a. Montrer que : $\forall x \in ]0, +\infty[, |f(x)| < \frac{1}{2x}$.

b. En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

5) a. Montrer que $f(\pi/2) > 0$ et que $f(\pi) < 0$.

b. Montrer que $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right) \sin(t)\,dt$. En déduire que $f(2\pi) > 0$.

c. Tracer, dans un repère orthonormé, les hyperboles d'équations respectives $y = \frac{1}{2x}$ et $y = -\frac{1}{2x}$, ainsi que l'allure de la courbe représentative de la restriction de f à $[-2\pi, 2\pi]$.

**EXERCICE 3**

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On note A la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, A est donc une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients réels. On note B la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, B est donc une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 3 lignes et 2 colonnes, à coefficients réels.

1) Vérifier que $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2) a. Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

b. Montrer que $\dim \operatorname{Im} g \leq 2$.

c. Déduire des questions précédentes que $\dim \operatorname{Im} g \circ f \leq 2$.

d. Conclure que gof n'est ni surjective, ni injective.

3) En déduire une valeur propre de BA.

On suppose maintenant que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x et y étant deux réels tels que $(x, y) \neq (0, 0)$.

a. Montrer que $BX \neq 0$.
b. Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de AB alors $\lambda$ est valeur propre de BA.
c. En déduire que BA est diagonalisable.

## PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul.

### Partie I

Une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, étant définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, A étant un événement de $\mathcal{A}$, de probabilité non nulle, on définit la variable aléatoire $T = Z / A$ ( Z sachant que A est réalisé) par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(T = k) = P([Z = k] / A)$.
On considère un événement A vérifiant $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$.
Montrer que si Z a une espérance, alors $Z / A$ et $Z / \overline{A}$ ont aussi une espérance et que :
$E(Z) = P(A)\, E(Z / A) + P(\overline{A})\, E(Z / \overline{A})$.

### Partie II

On dispose de deux urnes, U et V. Initialement, l'urne U est vide et l'urne V contient 2n boules numérotées de 1 à 2n.
On effectue une suite d'épreuves, chacune consistant à choisir, aléatoirement et de manière équiprobable, un nombre compris entre 1 et 2n, puis à transférer la boule portant le numéro choisi, de l'urne dans laquelle elle se trouve dans l'autre urne.
Pour tout entier k élément de $[\![ 0, 2n ]\!]$, on dit que U est dans l'état $E_k$ lorsque U contient k boules et on dit que U accède à l'état $E_k$ lorsque U contient k boules **pour la première fois**.
On note $X_k$ la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves qu'il faut effectuer pour que U accède à l'état $E_k$ et égale à 0 si l'état $E_k$ n'est jamais atteint.
On admettra que $X_k$ a une espérance, notée $m_k$.
Enfin, pour tout entier j, élément de $[\![ 0, 2n-1 ]\!]$, on pose $N_j = X_{j+1} - X_j$.
Le but de cette partie est d'évaluer le nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état $E_k$, c'est-à-dire d'évaluer le nombre $m_k$.

1) Montrer que $X_0$ et $X_1$ sont des variables certaines et en déduire leurs espérances.
2) a. Donner, pour tout j élément de $[\![ 0, 2n-1 ]\!]$, une interprétation de la variable $N_j$.
b. Montrer que $N_j$ a une espérance que l'on notera $\mu_j$ dans la suite.

3) Soit $j$ un élément de $[\![ 1, 2n-1 ]\!]$.

a. Soit $A_j$ l'événement : " U accède à l'état $E_{j+1}$ depuis l'état $E_j$, en une seule épreuve". Calculer $P(A_j)$.

b. Montrer que $N_j / A_j$ est la variable certaine égale à 1 et que $N_j / \overline{A}_j = 1 + N_{j-1} + N_j$.

c. Montrer, en utilisant la partie I, que : $\forall j \in [\![ 1, 2n-1 ]\!]$, $\mu_j = \dfrac{2n + j\, \mu_{j-1}}{2n - j}$.

d. En déduire que : $\forall j \in [\![ 0, 2n-1 ]\!]$, $\mu_j = 2n \displaystyle\int_0^1 x^{2n-j-1} (2-x)^j \, dx$

4) Soit $k$ un élément de $[\![ 1, 2n ]\!]$.

a. Écrire, en la justifiant, la relation liant $X_k$ et $N_0, N_1, \ldots, N_{k-1}$.

b. En déduire la relation liant $m_k$ et $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$.

c. Vérifier que : $\forall x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1} (2-x)^j = x^{2n-k} \left( \frac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)} \right)$.

d. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{2n-k} \left[ \frac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)} \right] dx$ est convergente.

5) En déduire que : $\forall k \in [\![ 0, 2n ]\!]$, $m_k = n \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{2n-k} \left[ \frac{(1+t)^k - (1-t)^k}{t} \right] dt$.

**Partie III : étude de deux cas particuliers.**

**1) Évaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état $E_n$, c'est-à-dire pour que, pour la première fois les urnes U et V contiennent le même nombre de boules.**

**a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^{2n}}{t} dt$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$ (on pourra utiliser la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique).**

**b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t} dt$ converge et vaut $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.**

**c. En déduire alors que : $m_n = n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$.**

**2) Évaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état $E_{2n}$, c'est-à-dire pour que, pour la première fois l'urne V soit vide.**

**a. Pour tout entier naturel p, on pose : $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t)^p - (1-t)^p}{t} dt$.**

**Vérifier que $I_p$ est une intégrale convergente puis calculer $I_p - I_{p-1}$.**

**b. En déduire que $m_{2n} = n \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{2^k}{k}$.**