

**ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES  
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS  
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE LYON**

**OPTION TECHNOLOGIQUE  
MATHÉMATIQUES II**

**Exercice**

Étant donné une fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$  on pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \int_0^1 f(x^n) dx$ . L'objet de l'exercice est d'étudier sur des exemples le comportement asymptotique de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $u_n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  dans les cas suivants :

- $f$  est la fonction constante égale à  $a$
- pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = x$
- pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = x^p$  où  $p$  est un entier naturel donné
- pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = x(1-x)$ .

2) Dans cette question  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  pour tout  $x \in [0, 1]$  et ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ .

- Calculer  $u_1$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et majorée par 1. Qu'en déduit-on ?
- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ . En déduire l'encadrement :

$$0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}, \text{ puis la valeur de } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

d) En remarquant qu'on a, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\frac{x^n}{1+x^n} = x \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$  et en effectuant une intégration par parties établir l'égalité

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

e) Montrer que, pour tout réel positif  $u$ ,  $\ln(1+u) \leq u$ . En déduire que  $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}$ .

f) Donner une valeur approchée de  $1 - u_{10}$ , puis de  $u_{10}$  à  $10^{-2}$  près.

**Problème**

L'espérance d'une variable aléatoire  $X$  sera notée  $E(X)$ .

**I. Question préliminaire**

Soit  $T$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $1/2$ .

a) Rappeler les valeurs de son espérance et de sa variance ; en déduire la valeur de  $E(T^2)$ .

b) A l'aide de ce qui précède déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$  et, pour tout entier naturel non nul, établir les inégalités

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \leq 2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k} \leq 6$$

**II. Etude de la suite de lancers d'une pièce.**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On considère l'expérience aléatoire consistant en la succession de  $n$  lancers d'une même pièce équilibrée, les résultats ("pile" et "face") d'un lancer étant indépendants des résultats des autres lancers et se produisant chacun avec une probabilité  $1/2$ . Un résultat de cette expérience aléatoire est donc une suite  $\omega$  de  $n$  "pile" ou "face". On dispose ainsi d'un espace probabilisé dont on notera  $\mathbf{P}$  la probabilité.

Pour tout résultat  $\omega$  on note, d'une part,  $S_n(\omega)$  le nombre de "pile" obtenus au cours des  $n$  lancers et d'autre part,  $T_n(\omega)$  le rang d'apparition du premier "pile" si au moins un "pile" apparaît dans  $\omega$ , sinon on pose  $T_n(\omega) = 0$ . On définit ainsi deux variables aléatoires  $S_n$  et  $T_n$ .

## Mathématiques II 2/2

Par exemple si  $n = 5$ , pour  $\omega = (P, F, F, P, F)$  alors  $S_5(\omega) = 2$  et  $T_5(\omega) = 1$ ; pour  $\omega = (F, F, F, F, F)$  alors  $S_5(\omega) = 0$  et  $T_5(\omega) = 0$ . Les variables aléatoires  $S_5$  et  $T_5$  prennent, avec une probabilité non nulle, les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5.

1) Dans cette question  $n = 3$ .

a) Donner la loi du couple  $(S_3, T_3)$ .

b) Donner la loi de  $T_3$  et calculer son espérance.

c) Quelle est la loi de  $S_3$  et quelle est son espérance?

d) Les variables  $S_3$  et  $T_3$  sont-elles indépendantes?

e) Calculer les probabilités suivantes :

- i)  $P(\{S_3 = T_3\})$
- ii)  $P(\{S_3 = T_3\} / \{T_3 \neq 0\})$
- iii)  $P(\{T_3 = 1\} / \{S_3 = 2\})$

f) Donner la loi de la variable produit  $S_3 T_3$ , calculer son espérance et en déduire le quotient  $\frac{E(S_3 T_3)}{E(S_3)E(T_3)}$ .

2) Désormais et jusqu'à la fin du problème on revient au cas général où  $n$  désigne un entier naturel non nul.

Pour  $k = 0$  puis pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ , calculer la probabilité conditionnelle  $P(\{T_n = k\} / \{S_n = 1\})$ . Pourquoi ce résultat était-il intuitivement prévisible?

3) a) Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire  $T_n$  et donner sa loi.

b) Pour  $x \in [0, 1[$  on pose  $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ . Donner une autre expression de  $f(x)$ , puis deux expressions de  $f'(x)$ .

En déduire la valeur de l'espérance de  $T_n$  en fonction de  $n$  et montrer que sa limite quand  $n \rightarrow +\infty$  est égale à 2.

c) Reconnaître la loi de  $S_n$  et préciser son espérance.

Justifier l'inégalité  $S_n T_n \geq S_n$  et en déduire que  $E(S_n T_n) \geq \frac{n}{2}$ .

d) Quand  $T_n$  prend la valeur  $k$  ( $0 < k \leq n$ ) quelles valeurs peut prendre  $S_n$ ?

e) Etudier les variations de la fonction  $x \mapsto x(n+1-x)$  définie sur  $[0, n+1]$ . En distinguant les cas  $n$  pair et  $n$  impair, donner la valeur maximale que peut prendre la variable  $S_n T_n$ .

En déduire que  $E(S_n T_n) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ .

4) On cherche maintenant à obtenir un meilleur encadrement de  $E(S_n T_n)$  permettant de calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(S_n T_n)}{n}$$

On admet que  $E(S_n T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \frac{n-k+2}{2}$ .

a) Utiliser la question préliminaire pour montrer que :

$$\frac{(n+2)}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} - 3 \leq E(S_n T_n) \leq n+2$$

b) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2$ .

c) En supposant que la suite de terme général  $\frac{E(S_n T_n)}{n}$  converge, déterminer sa limite.

d) En déduire la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(S_n T_n)}{E(S_n)E(T_n)}$$

Interpréter ce résultat.