

Concours d'admission de 1997

Mathématiques I Option scientifique

Vendredi 23 mai 1997 de 8^h à 12^h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.

Sont autorisées :

⇒ Une règle graduée.

⇒ Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel \mathbb{R}^4 étant rapporté

à sa base canonique, on note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 associé à A .

I désigne la matrice unité d'ordre 4.

- 1) a) Déterminer les valeurs propres de f .
- b) Déterminer les vecteurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
Le détail de la méthode utilisée et les principales étapes du calcul devront figurer sur la copie.
- 2) On considère les vecteurs $\varepsilon_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 1)$.
 - a) Déterminer des vecteurs ε_2 et ε_4 vérifiant les conditions suivantes :
 $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$, $f(\varepsilon_4) = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^4 .
 - b) Quelle est la matrice A' de f relativement à \mathcal{B}' ?
 - c) Calculer A'^n , pour tout n de \mathbb{N}^* . En déduire A^n .

EXERCICE 2 (5 points)

1) Pour $x \in]0, 1[$ et m entier on pose $f_m(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^m = \sum_{k=0}^m x^k$.

- a) Donner une expression simplifiée de $f_m(x)$ et en déduire $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$.
- b) Donner de même une expression de $f'_m(x)$, $f''_m(x)$ (où f'_m et f''_m désignent les deux premières dérivées de la fonction f_m), et en déduire $\lim_{m \rightarrow \infty} f'_m(x)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} f''_m(x)$.
- c) Indiquer comment on démontrerait que l'on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \sum_{k=\ell}^{\infty} C_k^\ell x^{k-\ell} = \frac{1}{(1-x)^{\ell+1}}$$

(le coefficient binomial C_k^ℓ , que l'on pourra noter $\binom{k}{\ell}$, ayant sa signification habituelle).

Une urne contient des boules de trois catégories, indiscernables au toucher : des boules rouges en proportion p_1 , des boules bleues en proportion p_2 et des boules incolores en proportion p_3 , avec : $p_1, p_2, p_3 \in]0, 1[$. (On pourra poser $p_1 + p_2 = 1 - p_3 = q$)

On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en notant à chaque fois la nature de la boule obtenue, et en la remplaçant dans l'urne avant le tirage suivant.

2) Soit X_1 le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire pour obtenir, pour la première fois, une boule incolore. Déterminer la loi de X_1 et vérifier que $\sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k) = 1$. Préciser l'espérance et la variance de X_1 .

3) Soit X_2 le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire pour obtenir, pour la deuxième fois, une boule incolore.

a) Déterminer la loi de X_2 . Vérifier que $\sum_{k=2}^{\infty} P(X_2 = k) = 1$

b) On écrit $X_2 = X_1 + Y$, où Y est le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire, à partir de l'obtention d'une première boule incolore, pour obtenir une deuxième boule incolore. Quelle est la loi de Y ? Calculer l'espérance de X_2 .

4) Dans cette question, on effectue des tirages jusqu'à l'obtention d'une première boule incolore et on note Z le nombre aléatoire de boules rouges obtenues avant cette première boule incolore.

Déterminer la loi du couple (X_1, Z) .

En déduire la loi de Z .

PROBLÈME (10 points)

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ et $\gamma_n = u_n - \ln n$. (\ln désignant la fonction « logarithme népérien »).

1) Montrer que pour tout entier k , au moins égal à deux, on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$.

En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln n \leq u_n \leq 1 + \ln n$.

2) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n>0}$ est monotone, en déduire que cette suite est convergente. Dans toute la suite sa limite sera notée γ .

3) Pour tout entier k , au moins égal à deux, on pose : $v_k = \int_{k-1}^k \frac{t-k+1}{t^2} dt$.

Montrer que : $\forall k \geq 2; 0 \leq v_k \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Montrer que la série de terme général v_k est convergente, et que : $\gamma_n - \gamma = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$.

En déduire que : $0 \leq \gamma_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$.

4) La convergence de la suite (γ_n) vers γ est donc lente : on se propose d'accélérer cette convergence. Pour cela :

a) Montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que pour $k \geq 2$, on a :

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)(1-2x)}{(x+k-1)^4} dx = 2.v_k + \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right] + \frac{1}{6} \times \left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} \right].$$

b) Montrer que pour $k \geq 2$ on a :

$$\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(x+k-1)^5} dx = v_k + \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right] + \frac{1}{12} \times \left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} \right].$$

c) On pose $I_k = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(x+k-1)^5} dx$.

i) Quel est le maximum de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur le segment $[0, 1]$?

ii) En déduire que, pour $k \geq 2$: $0 \leq I_k \leq \frac{1}{64} \left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k-1)^4} \right)$.

iii) En conclure que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq \gamma_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \leq \frac{1}{64.n^4}$.

d) Soit ε un nombre réel strictement positif. Pour quelles valeurs de n peut-on affirmer que $a_n = \gamma_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2}$ est une valeur approchée de γ avec une erreur inférieure à ε ?

e) Donner en particulier une valeur approchée de γ , avec une erreur inférieure à 5.10^{-3} .

Partie II

1) Montrer que, pour $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n], \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

2) Montrer que, pour $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$, on a : $x - x^2 \leq \ln(1+x)$.

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 4$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$: $t + n \cdot \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \geq -\frac{t^2}{n} \geq \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$.

Puis que : pour $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 4$ et $t \in [0, n]$: $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq e^{-t} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$.

3) En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4, \forall t \in [0, n]$:

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n} \cdot t^2 e^{-t}.$$

4) a) Montrer que l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \ln(t) dt$ est convergente.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot \ln(t) dt$.

On admet que l'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = -\gamma$ (ceci pourrait se démontrer à l'aide d'une intégration par parties et d'un changement de variable, ...).

A l'aide de la question 3), en déduire que K vaut $-\gamma$.