

# Concours d'admission de 1997

## Mathématiques III

### Option économique

Vendredi 23 mai 1997 de 8<sup>h</sup> à 12<sup>h</sup>

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.*

Sont autorisées :

⇒ Une règle graduée.

⇒ Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

#### EXERCICE 1 (5 points)

1) On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ , par :  $f(t) = \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t)$ , où  $\ln$  désigne la fonction « logarithme népérien ».

a) Étudier les variations de  $f$ . Préciser la nature de la branche infinie de la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé, ainsi que l'équation de la tangente à l'origine.

b) Montrer que l'équation  $f(t) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[$ , que l'on notera  $\alpha$ . En déduire le signe de  $f(x)$  selon la position de  $x$  par rapport à  $\alpha$ . Montrer que  $\alpha$  est comprise entre 3 et 4. Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,1.

2) On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = e^{-x} \cdot \ln(1 + e^{2x})$  (où  $x \mapsto e^x = \exp(x)$  désigne la fonction exponentielle de base  $e$ ).

a) Montrer que  $g$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

b) Calculer  $e^x \cdot g'(x)$ . Déterminer le signe de  $g'(x)$ , selon les valeurs de  $x$ .

c) Étudier les branches infinies de la représentation graphique de  $g$ .

#### EXERCICE 2 (5 points)

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  étant rapporté

à sa base canonique, on note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  associé à  $A$ .

$I$  désigne la matrice unité d'ordre 4.

1) Montrer que les seules valeurs propres de  $f$  sont 0 et 1. Déterminer les vecteurs propres de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

2) a) Déterminer le noyau de  $f \circ f$ .

b) A-t-on  $\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f$  ?

c) A-t-on  $\text{Im}(f \circ f) = \text{Im } f$  ?

3) On considère les vecteurs  $\varepsilon_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\varepsilon_2 = (-1, 0, 1, 0)$ ,  $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 1)$  et  $\varepsilon_4 = (1, 0, 1, 1)$ . Montrer que  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ . Quelle est la matrice de  $f$  relativement à cette nouvelle base ?

### EXERCICE 3 (5 points)

1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $f_n$ , définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f_n(x) = x + 2.x^2 + \dots + n.x^n = \sum_{k=1}^n k.x^k$$

Montrer que l'équation  $f_n(x) = 1$  admet une unique solution, que l'on notera  $u_n$ .

2) En évaluant  $f_{n+1}(u_n)$ , montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

3) a) Montrer que  $f_n(x) = x \times \frac{1 - (n+1).x^n + n.x^{n+1}}{(1-x)^2}$ .

b) Calculer  $u_2$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} n.(u_n)^n$ .

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

### EXERCICE 4 (5 points)

Une urne contient une proportion  $p$  de boules blanches et la proportion  $q = 1 - p$  de boules noires, avec  $0 < p < 1$ . On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à un tirage quelconque avant le tirage suivant, jusqu'à obtenir **deux fois de suite** la même couleur et on cesse alors les tirages. On note  $X$  le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois une boule blanche aux deux premiers tirages ? d'obtenir deux fois une boule noire aux deux premiers tirages ? En déduire la probabilité de l'événement  $(X = 2)$ .

2) Calculer la probabilité de l'événement  $(X = 3)$ .

3) Plus généralement, déterminer, pour tout  $k \geq 2$ , la probabilité de l'événement  $(X = k)$  (on distinguera deux cas, selon la parité de  $k$ ).

4) Montrer que l'on a :  $\sum_{k=2}^{\infty} P(X = k) = 1$ . Que peut-on en conclure ?

5) Montrer que  $X$  admet une espérance. Calculer l'espérance de  $X$ .