ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1997

OPTION SCIENTIFIQUE

Mathématiques II

Vendredi 2 Mai 1997 de 14h à 18h

On considère un parc de m machines identiques (avec $m \geq 1$) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq m$, on note X_i la variable aléatoire indiquant la durée de marche de la $i^{ième}$ machine (avant que celle-ci ne tombe en panne) à partir d'un instant 0.
On désigne par a un nombre réel strictement positif donné, et l'on fait les hypothèses suivantes sur le fonctionnement des machines:

(H1) Pour tout couple (t, h) de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$, on suppose que la variable aléatoire X_i à valeurs dans $\mathbf{R}+$ indiquant la durée de marche de la $i^{ième}$ machine à partir de l'instant 0 vérifie la relation suivante:

$$P(X_i < t+h \,/\, X_i \geq t) = ah + h\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction indépendante de l'entier i et de l'instant t qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

(H2) Les m machines fonctionnent indépendamment les unes des autres.

Pour tout nombre réel positif t, on désigne par:
- $N(t)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de machines en panne à l'instant t.
- $p_k(t)$ la probabilité $P(N(t) = k)$ pour que le nombre $N(t)$ de machines en panne à l'instant t soit exactement égal à k, où k est un nombre entier tel que $0 \leq k \leq m$.
  On suppose toutes les machines en marche à l'instant 0, autrement dit $p_0(0) = 1$.

L'objectif est de déterminer, sous ces hypothèses, la loi du nombre aléatoire N(t) des machines déjà tombées en panne à un instant t. Le résultat de l'étude est obtenu par deux méthodes indépendantes dans les parties I et II.

Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large est autorisée.

PARTIE 1

On étudie ici la loi de la variable aléatoire $N(t)$ en déterminant la loi des variables aléatoires X_i introduites dans le préambule.

1°) Lois de la durée de marche X_i d'une machine ($1 \le i \le m$).

On désigne par (t, h) un couple de nombres réels tels que $t \ge 0$ et $h > 0$, et l'on note $g_i(t) = P(X_i \ge t)$ la probabilité pour que X_i soit supérieure ou égale à t.

a) Comparer les événements $(X_i \ge t)$ et $(t \le X_i < t+h) \cup (X_i \ge t+h)$.

En déduire l'expression de la probabilité $P(t \le X_i < t+h)$ en fonction de $g_i(t)$ et $g_i(t+h)$, puis établir à l'aide de l'hypothèse H1 l'égalité $g_i(t) - g_i(t+h) = [ah+h\varepsilon(h)]g_i(t)$.

b) En déduire successivement que:

- $0 \le g_i(t) - g_i(t+h) \le [a+\varepsilon(h)]h$.
- $0 \le g_i(t-h) - g_i(t) \le [a+\varepsilon(h)]h$ lorsque $0 < h \le t$.

En déduire que la fonction $t \to g_i(t)$ est continue à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant le quotient $[g_i(t+h) - g_i(t)]/h$ et en prenant sa limite lorsque h tend vers 0, montrer que la fonction $t \to g_i(t)$ est dérivable à droite sur $[0, +\infty[$.

Donner l'expression de sa dérivée à droite en t en fonction de a et $g_i(t)$.

En déduire de même que la fonction $t \to g_i(t)$ est continue à gauche sur $]0, +\infty[$, puis dérivable à gauche sur $]0, +\infty[$.

c) Etablir que g_i est dérivable sur $\mathbf{R}+$ et exprimer $g_i'(t)$ en fonction de a et $g_i(t)$.

En étudiant la fonction $t \to \exp(at).g_i(t)$ sur $\mathbf{R}+$ et en remarquant que $g_i(0) = 1$, expliciter la fonction g_i.

d) En déduire la fonction de répartition, la densité, la loi et l'espérance des variables X_i ainsi qu'une interprétation du nombre réel a.

2°) Etude de la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

Déduire des résultats précédents les probabilités $p_k(t)$, la loi et l'espérance de $N(t)$. Quelle est la limite de $p_k(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$? Etait-ce prévisible?

PARTIE 2

On étudie ici la loi de la variable aléatoire $N(t)$ en déterminant sa fonction génératrice $G(x, t)$, c'est à dire la fonction de la variable réelle x définie par:

$$G(x,t) = \sum_{k=0}^{m} p_k(t)x^k$$

Cette étude, indépendante de celle de la partie I, n'utilise aucun de ses résultats.

1°) Etude des probabilités conditionnelles $P(N(t+h) = k / N(t) = i)$.

Pour tout couple (t, h) de nombres réels tels que $t \ge 0$ et $h > 0$ et tout couple (k, i) de nombres entiers tels que $0 \le k \le m$, $0 \le i \le m$, on se propose d'étudier les probabilités conditionnelles $P(N(t+h) = k / N(t) = i)$.

a) Que vaut $P(N(t+h) = k / N(t) = i)$ si $k < i$?

b) Etablir à l'aide des hypothèses H1 et H2 que:

$$P(N(t+h) = k / N(t) = k) = (1-ah-h\varepsilon(h))^{m-k}.$$

En déduire par un développement limité à l'ordre 1 que:

$$P(N(t+h) = k / N(t) = k) = 1 - (m-k)ah + h\varepsilon'(h)$$

où $\varepsilon'(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

c) Etablir de même que, pour $1 \le k \le m$:

$$P(N(t+h) = k / N(t) = k-1) = (m-k+1)ah + h\,\varepsilon''(h)$$

où $\varepsilon''(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

d) Démontrer enfin que $P(N(t+h) = k / N(t) = i)$ est négligeable devant h si $k \ge i+2$, c'est à dire égale à $h\varepsilon'''(h)$ où $\varepsilon'''(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 (on justifiera avec soin les résultats obtenus).

2°) Etude des probabilités de panne $p_k(t)$ $(0 \le k \le m)$.

a) A l'aide de la formule des probabilités totales, déduire des résultats précédents, pour $t \ge 0$ et $h > 0$, la probabilité $p_k(t+h)$ en fonction des probabilités $p_j(t)$ $(0 \le j \le m)$. Quelles expressions de $p_k(t+h) - p_k(t)$, puis de $p_k(t) - p_k(t-h)$ (où $h \le t$) en résulte-t-il?

b) En déduire que la fonction $t \to p_k(t)$ est continue à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant le quotient $[p_k(t+h) - p_k(t)]/h$ et en prenant sa limite lorsque h tend vers 0, montrer que la fonction $t \to p_k(t)$ est dérivable à droite sur $[0, +\infty[$.

Donner l'expression de sa dérivée à droite en t en fonction de k, m, a, $p_{k-1}(t)$, $p_k(t)$.

(On pourra convenir, ce qui est naturel, que $p_{-1}(t) = 0$).

En déduire de même que la fonction $t \to p_k(t)$ est continue à gauche sur $]0, +\infty[$, puis dérivable à gauche sur $]0, +\infty[$.

c) Etablir, pour $0 \le k \le m$, que p_k est dérivable sur $\mathbf{R}+$ et exprimer $p_k'(t)$ en fonction de k, m, a, $p_{k-1}(t)$, $p_k(t)$, puis en déduire la relation (R) suivante:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t) = ma(x-1)G(x,t) - ax(x-1)\frac{\partial G}{\partial x}(x,t).$$

3°) Etude d'un endomorphisme auxiliaire.

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_m[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à m, et l'application f associant à tout polynôme U de $\mathbf{R}_m[x]$ le polynôme $V = f(U)$ défini par:

$$V(x) = ma(x-1)U(x) - ax(x-1)U'(x)$$

où U' désigne le polynôme dérivé de U.

a) Etablir que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_m[x]$.

b) Soit λ une valeur propre de f et soit P un polynôme propre unitaire associé à λ, c'est à dire un polynôme unitaire P tel que $f(P) = \lambda P$.

- Etablir que 0 ou 1 est racine de P.

On pose donc $P(x) = x^h(x-1)^k R(x)$, où R est un polynôme tel que $R(0) \neq 0$, $R(1) \neq 0$ et h, k deux nombres entiers naturels tels que $1 \le h+k \le m$.

- Ecrire l'égalité $f(P) = \lambda P$ (que l'on simplifiera par $x^h(x-1)^k$), et en faisant tendre x vers 0 et vers 1, déterminer h et λ en fonction de a, k, m, et P en fonction de k et m.

c) Pour tout entier naturel $k \le m$, on note W_k le polynôme de $\mathbf{R}_m[x]$ défini par:

$$W_k(x) = x^{m-k}(x-1)^k.$$

Déterminer sous forme factorisée l'image par f du polynôme W_k.

Quelles sont les valeurs propres de l'endomorphisme f? f est-il diagonalisable?

d) Montrer que $(W_0, W_1, \dots, W_m)$ est une base de $\mathbf{R}_m[x]$, et déterminer les composantes du polynôme $U = 1$ dans cette base en développant l'égalité $[x - (x-1)]^m = 1$.

4°) Etude de la loi de la variable aléatoire N(t).

On décompose la fonction polynôme $x \to G(x, t)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_m[x]$ d'une part, dans la base $(W_0, W_1, \dots, W_m)$ de $\mathbf{R}_m[x]$ d'autre part:

$$G(x,t) = \sum_{k=0}^{m} p_k(t)x^k = \sum_{k=0}^{m} q_k(t)W_k(x).$$

a) On désigne par Π la matrice de passage de la base $(W_0, W_1, \dots, W_m)$ à la base canonique $(1, x, \dots, x^m)$. Ecrire une relation entre les deux matrices-colonnes de composantes $q_0(t), q_1(t), \dots, q_m(t)$ d'une part, $p_0(t), p_1(t), \dots, p_m(t)$ d'autre part.

En déduire que $q_0, q_1, \dots, q_m$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}+$.

b) En utilisant l'expression de $x \to G(x, t)$ dans la base $(W_0, W_1, \dots, W_m)$, établir que la relation (R) obtenue à la question 2° équivaut aux m+1 égalités suivantes:

$$q_k'(t) = -akq_k(t) \quad (0 \le k \le m).$$

En déduire que la fonction $t \to \exp(akt).q_k(t)$ est constante sur $\mathbf{R}+$, et que l'on a pour tout réel positif t: $q_k(t) = C_k.\exp(-akt)$ où C_k est une constante réelle.

c) Vérifier que $G(x, 0) = 1$, et en déduire que:

$$\sum_{k=0}^{m} C_k W_k(x) = 1.$$

En comparant cette expression du polynôme $U = 1$ dans la base $(W_0, W_1, \ldots, W_m)$ de $\mathbf{R}_m[x]$ à celle obtenue à la question 3°, déterminer les constantes C_k $(0 \le k \le m)$. En déduire alors que:

$$G(x, t) = [(1 - \exp(-at))x + \exp(-at)]^m.$$

d) En développant cette expression de $G(x, t)$, en déduire à nouveau les probabilités $p_k(t)$, la loi et l'espérance de la variable aléatoire $N(t)$.

***