
ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1997

OPTION ECONOMIQUE

Mathématiques III

Vendredi 25 Avril 1997 de 8h à 12h

Problème 1

L'objet de ce problème est l'étude des jets d'un dé, puis d'un ensemble de n dés.

1°) Calcul de sommes de séries.

On considère dans cette question un nombre entier $n \geq 1$ et la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$

a) Calculer $(1-x)S_n(x)$ et en déduire une expression de $S_n(x)$.

En déduire, pour $0 \leq x < 1$, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

b) Dériver $S_n(x)$ et déterminer la limite de la suite (nx^n) quand n tend vers $+\infty$.

En déduire, pour $0 \leq x < 1$, la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$.

2°) Etude du jet d'un dé équilibré à 6 faces.

On lance indéfiniment un dé équilibré et l'on désigne par T la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, le dé donne l'as.

- Déterminer pour tout entier $k \geq 1$ les probabilités des événements $T = k$, $T \leq k$.
- En déduire l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T .

3°) Etude du jet de n dés équilibrés à 6 faces.

On considère le jeu suivant: on lance indéfiniment un ensemble de n dés équilibrés, numérotés $1, 2, \dots, n$ (où le nombre entier n est supérieur ou égal à 1).

Autrement dit, on lance une première fois les n dés, puis on relance une seconde fois ces n dés, et ainsi de suite. On désigne par:

- N la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, chacun des n dés a amené au moins une fois l'as.
- T_j la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, le $j^{\text{ème}}$ dé a amené l'as ($1 \leq j \leq n$).

Dans la suite de la question, on note k un nombre entier supérieur ou égal à 1.

- a) Déterminer la probabilité $P(N = 1)$.
 b) Comparer les événements $(N \leq k)$ et $(T_1 \leq k) \cap (T_2 \leq k) \cap \dots \cap (T_n \leq k)$.
 En déduire les probabilités $P(N \leq 2)$ et $P(N = 2)$, puis, plus généralement, $P(N \leq k)$ et $P(N = k)$.
 c) Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Vérifier alors que :

$$P(N = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} - \frac{11}{36} \left(\frac{25}{36} \right)^{k-1}.$$

En déduire, sous forme de fraction irréductible, l'espérance $E(N)$ de N .

- d) Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Déterminer de même $E(N)$.
 e) On revient au cas général où l'entier n est supérieur ou égal à 1, et l'on s'intéresse à la médiane de la variable aléatoire N .
 - Etablir pour tout nombre réel x l'inégalité $1 - e^{-x} \leq x$.
 - En déduire que l'inégalité $P(N \leq k) \geq 0.5$ implique l'inégalité :

$$k \geq \frac{\ln(n) - \ln(\ln(2))}{\ln(6) - \ln(5)} = 5,48... \ln(n) + 2,01....$$

- En déduire un nombre entier naturel auquel k est supérieur ou égal dans chacun des trois cas $n = 10$, $n = 50$, $n = 100$.
 f) Ecrire un algorithme (en PASCAL) permettant le calcul successif des 30 premiers termes de la suite $k \rightarrow P(N \leq k)$ lorsque l'entier n est donné.
 Déterminer à l'aide de cet algorithme les plus petites valeurs de l'entier k pour lesquelles on a $P(N \leq k) \geq 0.5$ lorsque $n = 10, 50, 100$.
 Comparer ces résultats à ceux obtenus précédemment à la question (d).

Problème 2

L'objet de ce problème est l'étude des racines réelles du polynôme P_n défini pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel x par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

1°) Etude de P_n pour $n \leq 3$.

Etudier les variations et tracer sur une même figure (avec pour unité : 2centimètres) les courbes représentatives des polynômes P_n pour $n = 0, 1, 2, 3$.

2°) Comparaison de $\exp(x)$ et $P_n(x)$.

- a) Etablir que $P_n(x) \leq \exp(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel positif x .
 b) Etablir que $P_{2n+1}(x) \leq \exp(x) \leq P_{2n}(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel négatif x (on pourra par exemple raisonner par récurrence).

3°) Etude du nombre des racines réelles de P_n .

- a) Déduire de la question 2 le nombre des racines et le signe de P_{2n} sur \mathbb{R} .
 b) Comparer la dérivée de P_{2n+1} avec P_{2n} . En déduire que le polynôme P_{2n+1} possède une racine réelle unique, et que celle-ci est strictement négative.

On note désormais x_n l'unique racine du polynôme P_{2n+1} . Ainsi $x_0 = -1$.

- c) Déduire des résultats précédents les variations de P_{2n} et de P_{2n+1} puis donner sur une même figure l'allure des courbes représentatives des fonctions $x \rightarrow P_{2n+1}(x)$, $x \rightarrow P_{2n}(x)$ et $x \rightarrow \exp(x)$ sur \mathbb{R} .

4°) Détermination de la racine du polynôme P_3 .

- a) Etablir qu'un nombre réel x est racine de l'équation $P_3(x) = 0$ si et seulement si $t = x + 1$ est racine de l'équation $t^3 + 3t + 2 = 0$.

- b) Etudier les variations du polynôme $P(t) = t^3 + 3t + 2$ et prouver que celui-ci admet une racine réelle et une seule que l'on convient de noter r .

- En considérant l'équation du second degré $z^2 - rz - 1 = 0$, établir l'existence de deux nombres réels u, v de somme égale à r , de produit égal à -1 .

- En remarquant que $P(u+v) = 0$, déterminer la somme $u^3 + v^3$, puis écrire une équation du second degré dont les deux racines sont u^3 et v^3 .

- Résoudre cette équation afin d'en déduire u^3 et v^3 , puis u et v , et enfin r que

l'on exprimera à l'aide des racines cubiques des nombres $\sqrt{2}-1$ et $\sqrt{2}+1$.

- c) En déduire que la racine x_1 du polynôme P_3 est égale à $r-1$ et préciser une valeur approchée à 10^{-5} près de x_1 .

5°) Etude de la suite (x_n) des racines des polynômes P_{2n+1} .

- a) En groupant les termes deux par deux dans $P_{2n+1}(-2n-1)$, déterminer le signe de $P_{2n+1}(-2n-1)$ pour tout entier naturel n . En déduire que $-2n-1 \leq x_n$.

- b) Etudier le signe de $P_{2n+3}(x_n) - P_{2n+1}(x_n)$. En déduire que $x_{n+1} < x_n$.

- c) Etablir à l'aide de la question 2 l'inégalité: $0 < \exp(x_n) \leq -\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- d) On se propose d'établir enfin que la suite (x_n) diverge vers $-\infty$. A cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose que la suite (x_n) est minorée. Etablir:

- que la suite (x_n) converge vers une limite réelle $L < 0$ (on citera clairement le théorème utilisé).

- que pour tout nombre entier naturel n , $-\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq -\frac{L^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- que le nombre $\exp L$ est nul (on étudiera d'abord la limite de la suite $k \rightarrow L^k/k!$).

Conclure.